Die

Arithmetik der Griechen

von

Friedrich von Drieberg.

Zweiter Theil.

Leipzig, 1821.

In Commission bei J. A. G. Weigel.

Höhere Arithmetik.

1.

Von den Steigerungen.

Steigerungen entstehen, wenn irgend eine Zahl immerfort mit sich selbst vervielfältigt wird. Beginnt die Reihe mit 2, so ist das Erzeugniß von 2 mal 2 die erste Steigerung, des Erzeugniß von 2 mal 2 mal 2 die zweite Steigerung u. s. w. Wird hingegen, statt einer Zahl, die Einheit zum Grunde gelegt, so erhält man zwar gleichfalls alle Steigerungen, aber alle Steigerungen bleiben 1.

	1		2
	1		2
1te Steigerung	1	1te Steigerung	4
	1		2
2te Steigerung	1	2te Steigerung	8
	1		2
3te Steigerung	1	3te Steigerung	16
	1		2
4te Steigerung	1	4te Steigerung	32
	1		2
5te Steigerung	1	5te Steigerung	64

Es ist leicht einzusehen, daß diese Steigerungen ins Unendliche fortgeführt werden können, allein die Griechen haben nicht für nöthig geachtet, weiter als bis zur fünften zu gehen. [1]) In Theilzahlen finden die nemlichen Steigerungen Statt, indem der Zähler ebensowohl die Einheit als eine Zahl sein kann.

	1^{2}		2^{3}
	1^{2}		2^{3}
1te Steigerung	1^{4}	1te Steigerung	4^{9}
	1^{2}		2^{3}
2te Steigerung	1^{8}	2te Steigerung	8^{27}
	1^{2}		2^{3}
3te Steigerung	1^{16}	3te Steigerung	16^{81}
	1^{2}		2^{3}
4te Steigerung	1^{32}	4te Steigerung	32^{243}
	1^{2}		2^{3}
5te Steigerung	1^{64}	5te Steigerung	64^{729}

Die Zahl, welche den Steigerungen in ganzen Zahlen zum Grunde liegt, heißt ἀριθμός;

[1]) Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex.

die Namen der fünf Steigerungen selbst aber sind: *δύναμις, κύβος, δυναμοδύναμις, δυναμόκοβος, κυβόκυβος*. Die Zahl, welche den Steigerungen in Theilzahlen zum Grunde liegt, heißt *ἀριθμοςὸν*; die fünf Steigerungen aber haben folgende Namen: *δυναμοςὸν, κοβοςὸν, δυναμοδυναμοςὸν. δυναμοκυβοςὸν, κυβοκυβοςὸν*. Diese Namen werde ich auf nachstehende Art übersetzen:

Ἀριθμὸς,	Zahl,
Δύναμις,	Viereck,
Κύβος,	Würfel,
Δυναμοδύναμις,	Doppelviereck,
Δυναμόκυβος,	Viereckwürfel,
Κυβόκυβος.	Doppelwürfel.

Ἀριθμοςὸν,	Theilzahl,
Δυναμοςὸν,	Theilviereck,
Κυβοςὸν,	Theilwürfel,
Δυναμοδυναμοςὸν,	Doppeltheilviereck,
Δυναμοκυβοςὸν,	Theilviereckwürfel,
Κυβοκυβοςὸν.	Doppeltheilwürfel.

Statt der langen Namen gebrauchen aber die Griechen gewöhnlich bloß die Anfangsbuchstaben derselben, nemlich

$\bar{\varsigma}$ statt ἀριθμὸς,
$\delta^{\bar{\upsilon}}$ statt δύναμις,
$\kappa^{\bar{\upsilon}}$ statt κύβος,
$\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$ statt δυναμοδύναμις,
$\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$ statt δυναμόκυβος,
$\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$ statt κυβόκυβος.

Solcher Abkürzungen sind wir ebenfalls benöthigt, und ich werde daher in der Folge setzen:

Z statt Zahl,
V statt Viereck,
W statt Würfel,
${}^{d}V$ statt Doppelviereck,
${}^{v}W$ statt Viereckwürfel,
${}^{d}W$ statt Doppelwürfel.

Mit diesen sechs Steigerungszeichen unbekannter Größen wird nun in der höhern Arithmetik gerechnet, und zwar, indem sie mit den bereits

aufgeführten Steigerungen bekannter Größen, wie nachstehend, verbunden werden.

$$1Z\ ,\ 1V\ ,\ 1W\ ,\ 1^{d}V\ ,\ 1^{v}W\ ,\ 1^{d}W$$

$$2Z\ ,\ 4V\ ,\ 8W\ ,\ 16^{d}V\ ,\ 32^{v}W\ ,\ 64^{d}W$$

$$1^{\underline{2}}Z\ ,\ 1^{\underline{4}}V\ ,\ 1^{\underline{8}}W, 1^{\underline{16}^{d}}V\ ,\ 1^{\underline{32}^{v}}W\ ,\ 1^{\underline{64}^{d}}W$$

$$2^{\underline{3}}Z\ ,\ 4^{\underline{2}}V\ ,\ 8^{\underline{27}}W, 16^{\underline{81}^{d}}V, 32^{\underline{243}^{v}}W, 64^{\underline{729}^{d}}W$$

$$1^{\underline{1Z}}\ ,\ 1^{\underline{1V}}\ ,\ 1^{\underline{1W}}\ ,\ 1^{\underline{1^{d}V}}\ ,\ 1^{\underline{1^{v}W}}\ ,\ 1^{\underline{1^{d}W}}$$

$$2^{\underline{1Z}}\ ,\ 4^{\underline{1V}}\ ,\ 8^{\underline{1W}}\ ,\ 16^{\underline{1^{d}V}}\ ,\ 32^{\underline{1^{v}W}}\ ,\ 64^{\underline{1^{d}W}}$$

$$1^{\underline{2Z}}\ ,\ 1^{\underline{4V}}\ ,\ 1^{\underline{8W}}\ ,\ 1^{\underline{16^{d}V}}\ ,\ 1^{\underline{32^{v}W}}\ ,\ 1^{\underline{64^{d}W}}$$

$$3^{\underline{2Z}}\ ,\ 9^{\underline{4V}}\ ,\ 27^{\underline{8W}}\ ,\ 81^{\underline{16^{d}V}}, 243^{\underline{32^{v}W}}\ ,\ 729^{\underline{64^{d}W}}$$

Es heißt demnach 1 Z so viel als 1 mal die unbekannte Zahl, welche den Steigerungen zum Grunde liegt, $1^{\underline{2}}Z$ so viel als 1 halbmal die unbekannte Zahl; 1 V heißt so viel als 1 mal das Viereck der unbekannten Zahl, 8 W so viel als 8 mal der Würfel der unbekannten Zahl; $1^{\underline{1Z}}$ heißt so viel als 1 mal der gleichnamige Theil der unbekannter Zahl, $4^{\underline{1V}}$ so viel als 4 mal das Viereck des gleichnamigen Theils der unbekannten Zahl u. s. w.

2.

Von den einfachen und zusammengesetzten Größen.

Einfach heißen in der höhern Arithmetik Größen, die nur aus einem Gliede bestehen, wie 1 Z, 2^1V, 8 W u. s. w. zusammengesetzt hingegen, die zwei oder mehrere Glieder enthalten. Enthält eine Größe zwei Glieder, so wird das zweite Glied dem ersten entweder zugezählt oder von ihm abgezählt, wie in nachstehenden Beispielen.

3 V und 1 Z 3 V weniger 1 Z

Das Zuzählen deuten die Griechen nicht besonders an, das Abzählen bezeichnen sie aber beständig durch λείψει, oder durch das stellvertretende Zeichen ⋔. Ich werde in der Folge die Wörtchen und und weniger beibehalten, jedoch der Kürze wegen nur die Anfangsbuchstaben setzen, und also die obigen Beispiele so schreiben:

3 V u 1 Z 3 V w 1 Z

Die Glieder der zusammengesetzten Größen können demnach sowohl vermehrend als vermindernd sein. Die vermindernden Größen nennen

die Griechen λεῖψις, die vermehrenden ὕπαρξις. Ich übersetze λεῖψις durch Abgezähltes, und ὕπαρξις durch Zugezähltes. Unter Zugezähltes verstehe ich daher nicht bloß die Hinterglieder zusammengesetzter Größen, welche den Vordergliedern zugezählt werden, sondern auch alle einfache Größen, und alle Glieder, zu welchen zugezählt oder von welchen abgezählt wird. Das Zugezählte ist ohne Schwierigkeit; vom Abgezählten aber sind folgende beiden Sätze wohl zu merken.

1) Das Abgezählte kann niemals allein stehen.

Denn das Abgezählte bildet keine Zahl für sich, sondern es wird dadurch nur angedeutet, um wie viel das Vorderglied zu groß ist. Wir können daher bloß sagen: 3Z weniger 2, niemals aber schlechtweg: weniger 2, weil dies durchaus keinen Sinn giebt. Das Abgezählte muß also beständig mit der Zahl, von welcher es abgezählt wird, verbunden sein, und kann niemals als einfache Größe vorkommen. Hieraus folgt auch, daß das eine Glied immer eine unbekannte Zahl sein muß; denn es ist kein Fall denkbar, wo es besser wäre, statt 10, 12 weniger 2 zu sagen.

2) Das Abgezählte muß immer kleiner sein als die Zahl, von welcher es abgezählt wird.

Denn ist das Abgezählte mit der Zahl, von welcher es abgezählt wird, von gleicher Größe, so sind beide Glieder zusammen gleich nichts, und das ist ungereimt. Diese Ungereimtheit aber würde bis zum Wahnsinn gesteigert werden, wenn man das Abgezählte sogar größer als die Zahl setzen wollte, von welcher es abgezählt wird; denn von keiner Größe kann mehr genommen werden als alle Theile.

3.

Die vier Rechensarten mit einfachen Größen.

a. Vervielfältigung.

1 Z mal 1 Z ist 1 V

1 Z mal 1 V ist 1 W

1 Z mal 1 W ist $1^{d}V$

1 Z mal $1^{d}V$ ist $1^{v}W$

1 Z mal $1^{v}W$ ist $1^{d}W$

1 V mal 1 V ist $1^{d}V$

$1V$ mal $1W$ ist $1^{v}W$

$1V$ mal $1^{d}V$ ist $1^{d}W$

$1W$ mal $1W$ ist $1^{d}W$

Verbindet man, statt der Einheit, irgend eine Zahl mit den Steigerungszeichen, so heißt es: $2Z$ mal $3Z$ ist $6V$, $3Z$ mal $4V$ ist $12W$ u. s. w. dasselbe gilt auch von allen folgenden Vervielfältigungen.

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{\underline{1Z}}$ ist $1^{\underline{1V}}$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{\underline{1V}}$ ist $1^{\underline{1W}}$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{\underline{1W}}$ ist $1^{\underline{1^{d}V}}$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{\underline{1^{d}V}}$ ist $1^{\underline{1^{v}W}}$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{\underline{1^{v}W}}$ ist $1^{\underline{1^{d}W}}$

$1^{\underline{1V}}$ mal $1^{\underline{1V}}$ ist $1^{\underline{1^{d}V}}$

$1^{\underline{1V}}$ mal $1^{\underline{1W}}$ ist $1^{\underline{1^{v}W}}$

$1^{\underline{1V}}$ mal $1^{\underline{1^{d}V}}$ ist $1^{\underline{1^{d}W}}$

$1^{\underline{1W}}$ mal $1^{\underline{1W}}$ ist $1^{\underline{1^{d}W}}$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1Z$ ist 1

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1V$ ist $1Z$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1W$ ist $1V$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{d}V$ ist $1W$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{v}W$ ist $1^{d}V$

$1^{\underline{1Z}}$ mal $1^{d}W$ ist $1^{v}W$

$1^{\underline{1V}}$ mal 1V ist 1

$1^{\underline{1V}}$ mal 1W ist 1Z

$1^{\underline{1V}}$ mal $1^{d}V$ ist 1V

$1^{\underline{1V}}$ mal $1^{v}W$ ist 1W

$1^{\underline{1V}}$ mal $1^{d}W$ ist $1^{d}V$

$1^{\underline{1W}}$ mal 1W ist 1

$1^{\underline{1W}}$ mal $1^{d}V$ ist 1Z

$1^{\underline{1W}}$ mal $1^{v}W$ ist 1V

$1^{\underline{1W}}$ mal $1^{d}W$ ist 1W

$1^{\underline{1^{d}V}}$ mal $1^{d}V$ ist 1

$1^{\underline{1^{d}V}}$ mal $1^{v}W$ ist 1Z

$1^{\underline{1^{d}V}}$ mal $1^{d}W$ ist 1V

$1^{\underline{1^{v}W}}$ mal $1^{v}W$ ist 1

$1^{\underline{1^{v}W}}$ mal $1^{d}W$ ist 1Z

$1^{\underline{1^{d}W}}$ mal $1^{d}W$ ist 1

1Z mal $1^{\underline{1Z}}$ ist 1

1Z mal $1^{\underline{1V}}$ ist $1^{\underline{1Z}}$

1Z mal $1^{\underline{1W}}$ ist $1^{\underline{1V}}$

1Z mal $1^{\underline{1^{d}V}}$ ist $1^{\underline{1W}}$

1Z mal $1^{\underline{1^{v}W}}$ ist $1^{\underline{1^{d}V}}$

$1Z$ mal $1^{\underline{1^{d}W}}$ ist $1^{\underline{1^{v}W}}$

$1V$ mal $1^{\underline{1V}}$ ist 1

$1V$ mal $1^{\underline{1W}}$ ist $1^{\underline{1Z}}$

$1V$ mal $1^{\underline{1^{d}V}}$ ist $1^{\underline{1V}}$

$1V$ mal $1^{\underline{1^{v}W}}$ ist $1^{\underline{W}}$

$1V$ mal $1^{\underline{1^{d}W}}$ ist $1^{\underline{1^{d}V}}$

$1W$ mal $1^{\underline{1W}}$ ist 1

$1W$ mal $1^{\underline{1^{d}V}}$ ist $1^{\underline{1Z}}$

$1W$ mal $1^{\underline{1^{v}W}}$ ist $1^{\underline{1V}}$

$1W$ mal $1^{\underline{1^{d}W}}$ ist $1^{\underline{1W}}$

$1^{d}V$ mal $1^{\underline{1^{d}V}}$ ist 1

$1^{d}V$ mal $1^{\underline{1^{v}W}}$ ist $1^{\underline{1Z}}$

$1^{d}V$ mal $1^{\underline{1^{d}W}}$ ist $1^{\underline{1V}}$

$1^{v}W$ mal $1^{\underline{1^{v}W}}$ ist 1

$1^{v}W$ mal $1^{\underline{1^{d}W}}$ ist $1^{\underline{1Z}}$

$1^{d}W$ mal $1^{\underline{1^{d}W}}$ ist 1

b. Theilung.

1Z in 1Z habe ich 1 mal

1Z in 1V habe ich 1Z mal

1Z in 1W habe ich 1V mal

1Z in $1^{d}V$ habe ich 1W mal

$1Z$ in $1^{v}W$ habe ich $1^{d}V$ mal
$1Z$ in $1^{d}W$ habe ich $1^{v}W$ mal
$1V$ in $1V$ habe ich 1 mal
$1V$ in $1W$ habe ich $1Z$ mal
$1V$ in $1^{d}V$ habe ich $1V$ mal
$1V$ in $1^{v}W$ habe ich $1W$ mal
$1V$ in $1^{d}W$ habe ich $1^{d}V$ mal
$1W$ in $1W$ habe ich 1 mal
$1W$ in $1^{d}V$ habe ich $1Z$ mal
$1W$ in $1^{v}W$ habe ich $1V$ mal
$1W$ in $1^{d}W$ habe ich $1W$ mal
$1^{d}V$ in $1^{d}V$ habe ich 1 mal
$1^{d}V$ in $1^{v}W$ habe ich $1Z$ mal
$1^{d}V$ in $1^{d}W$ habe ich $1V$ mal
$1^{v}W$ in $1^{v}W$ habe ich 1 mal
$1^{v}W$ in $1^{d}W$ habe ich $1Z$ mal
$1^{d}W$ in $1^{d}W$ habe ich 1 mal

Sind Zahlen, statt der Einheit, mit den Steigerungszeichen verbunden, so heißt es: 1Z in 8Z habe ich 8 mal, 2Z in 8V habe ich 4Z mal u. s. w. Die Theilungen mit Theilzahlen sind nicht gebräuchlich, ich führe sie daher hier nicht mit auf.

c. Zusammensetzung.

Nur Größen mit gleichen Zeichen sind, im eigentlichen Sinne, zusammenzusetzen; der Bestand von 2Z und 3Z ist 5Z, der Bestand von 2V und 4V ist 6V u. s. w. Hingegen der Bestand von 2V und 3Z bleibt unverändert 2V u 3Z, der Bestand von 2Z und 3, unverändert 2Z u 3 u. s. w.

d. Trennung.

Dasselbe gilt auch von der Trennung; 2Z von 3Z getrennt, läßt den Uiberschuß 1Z, 2V von 5V getrennt, den Uiberschuß 3V u. s. w. Hingegen 3Z von 2V getrennt, läßt den Uiberschuß 2V w 3Z, 3 von 2Z getrennt, den Uiberschuß 2Z w 3 u. s. w.

4.

Die vier Rechensarten mit zusammengesetzten Größen.

a. Vervielfältigung.

Bei der Vervielfältigung zusammengesetzter Größen bildet jedes Glied, wie in der schlichten

Arithmetik, eine besondere Reihe. Man kann auch ebenfalls von der Rechten anfangen, jedoch ist es, der nachzusetzenden Steigerungszeichen wegen, um vieles bequemer von der Linken zur Rechten fortzuschreiten. Soll daher z. B. 3Z u 3 mit 2Z u 2 vervielfältigt werden, so geschieht dies wie nachstehend,

3Z u 3		
2Z u 2		
6V u 6Z		
	6Z u 6	
6V u 12Z u 6		

indem ich sage: 2Z mal 3Z ist 6V, 2Z mal 3 ist 6Z; und zur zweiten Reihe: 2 mal 3Z ist 6Z, 2 mal 3 ist 6. Das Erzeugniß ist demnach 6V u 12Z u 6, oder kürzer, 6V12Z u 6.

Die Vervielfältigung zusammengesetzter Größen, welche Abgezähltes enthalten, findet ganz auf dieselbe Art Statt, nur in Hinsicht des Abgezählten ist folgendes zu merken:

1) Abgezähltes mit Abgezähltem vervielfältigt, giebt Zugezähltes.

2) Abgezähltes mit Zugezähltem vervielfältigt, giebt Abgezähltes.

Diese Regeln muß man übrigens, wie auch ähnliche in der Folge, als bloße Rechen-Kunstgriffe betrachten; denn in der Natur des Abgezählten liegt es keinesweges, daß es durch Vervielfältigung Zugezähltes werden könnte.

Soll nun z. B. 3Z w 3 mit 2Z w 2 vervielfältigt werden, so geschieht dies, mit Befolgung obiger Regeln, wie nachstehend.

3Z	w	3		
2Z	w	2		
6V	w	6Z		
		6Z	u	6
6V	w	12Z	u	6

Das Erzeugniß ist demnach 6V w 12Z u 6, oder das Zugezählte neben einander gestellt, 6V u 6 w 12Z. — Hier noch ein Beispiel wie Vierecke und Würfel zusammengesetzter Größen berechnet werden:

Seite . . 2Z u 3
2Z u 3

4V u 6Z
6Z u 9

Viereck . . 4V u 12Z u 9
2Z u 3

8W u 24V u 18Z
12V u 36Z u 27

Würfel . . 8W u 36V u 54Z u 27

b. Theilung.

Bei der Theilung zusammengesetzter Größen wird ebenfalls der nemliche Gang, wie in der schlichten Arithmetik, beobachtet. Soll daher z. B. 6V 12Z u 6 durch 3Z u 3 getheilt werden, so geschieht dies wie nachstehend,

3Z u 3) 6V u 12Z u 6 || 2Z u 2
6V u 6Z

6Z u 6
6Z u 6

indem ich sage: 3Z u 3 in 6V u 12Z habe ich 2Z mal, denn 2Z mal 3Z ist 6V, und 2Z mal 3 ist 6Z. Jetzt trenne ich 6Z von 12Z, setze die noch übrige Zahl herab, und sage wieder: 3Z u 3 in 6Z u 6 habe ich 2 mal, denn 2 mal 3Z ist 6Z, und 2 mal 3 ist 6. Der Enthalt ist demnach 2Z u 2.

Die Theilung zusammengesetzter Größen, welche Abgezähltes enthalten, findet ganz auf dieselbe Art Statt, nur in Hinsicht des Abgezählten ist folgendes zu merken:

1) Abgezähltes durch Abgezähltes getheilt, giebt Zugezähltes.

2) Abgezähltes durch Zugezähltes getheilt, giebt Abgezähltes.

Soll nun z. B. 6V w 12Z u 6 durch 3Z w 3 getheilt werden, so geschieht dies, mit Befolgung obiger Regeln, wie nachstehend.

3Z w 3) 6V w 12Z u 6 || 2Z w 2
6V w 6Z
―――――
6Z u 6
6Z u 6
―――――

c. Zusammensetzung.

Die Zusammensetzung von Größen mit gleichen Zeichen geschieht auf die gewöhnliche Art.

2V u 3Z

2V u 2Z

4V u 5Z

Soll aber z. B. 3W u 3V mit 4Z u 5 zusammengesetzt werden, so ist dies nicht anders möglich, als daß man beide Größen wie nachstehend mit einander verbindet.

3W3V4Z u 5

Die Zusammensetzung zweier abgezählter Glieder mit gleichen Zeichen geschieht ebenfalls nach Art der schlichten Arithmetik, und der Bestand bleibt Abgezähltes.

2V w 3Z

2V w 2Z

4V w 5Z

Soll aber ein abgezähltes und ein zugezähltes Glied zusammengesetzt werden, so erhält man

den Bestand, wenn man den Unterschied beider Zahlen nimmt.

5V w 6Z	5V w 6Z
2V u 4Z	2V u 9Z
7V w 2Z	7V u 3Z

Ob aber dieser Bestand Abgezähltes oder Zugezähltes sein muß, richtet sich nach der größern Zahl. Im ersten Beispiel ist 6Z die größere Zahl, und da sie Abgezähltes ist, so ist auch der Bestand 2Z Abgezähltes; im zweiten Beispiel ist 9Z die größere Zahl, und da sie Zugezähltes ist, so ist auch der Bestand 3Z Zugezähltes.

d. Trennung.

Auch die Trennung von Größen mit gleichen Zeichen geschieht auf die gewöhnliche Art.

8V u 6Z
3V u 3Z
5V u 3Z

Soll aber z. B. 3Z u 4 von 2W u 3V getrennt werden, so ist dies nicht anders möglich,

als daß man die beiden Glieder der zu trennenden Größe als Abgezähltes bezeichnet, und sie wie nachstehend mit der andern Größe verbindet.

2W u 3V w 3Z w 4

Die Trennung zweier abgezählter Glieder mit gleichen Zeichen geschieht ebenfalls nach Art der schlichten Arithmetik, und der Uiberschuß bleibt Abgezähltes.

8V w 6Z
3V w 3Z
5V w 3Z

Soll aber ein abgezähltes Glied von einem zugezählten, oder ein zugezähltes Glied von einem abgezählten getrennt werden, so erhält man den Uiberschuß, wenn man den Bestand beider Glieder nimmt.

5V u 7Z	8V w 3Z
2V w 2Z	2V u 2Z
3V u 9Z	6V w 5Z

Ob aber dieser Uiberschuß Zugezähltes oder Abgezähltes sein muß, richtet sich nach der Zahl, von welcher getrennt wird. Im ersten Beispiel ist 7 Z Zugezähltes, und daher auch der Uiberschuß 9 Z; im zweiten Beispiel ist 3 Z Abgezähltes, und daher auch der Uiberschuß 5 Z.

5.

Von den Gleichungen.

Nachdem eine Rechnung mit unbekannten Größen bis zu Ende durchgeführt worden, so bleibt noch übrig, den Werth von 1Z kennen zu lernen; denn ist dieser bekannt, so ist es auch der Werth aller übrigen Größen. Hätte man z. B. gefunden, die gesuchte Zahl sei

2W3V4Z u 5

1Z aber gleich 3, so ist diese Zahl 98. Denn das Viereck von 3 ist 9, der Würfel von 3 ist 27; zwei W sind also gleich 54, drei V gleich 27, und vier Z gleich 12. Den Werth von 1Z aber lernt man kennen, wenn man zwei Größen

von demselben Inhalt, aber von verschiedener Gestalt, mit einander vergleicht. Werden einfache Größen mit einander verglichen, und eine derselben ist eine bekannte Zahl, wie in folgendem Beispiel,

$$2Z = 6$$

so ist ohne Weiteres klar, daß 1 Z gleich 3 ist. Sind aber beide Größen unbekannt, wie in nachstehendem Beispiel,

$$2V = 20Z$$

so werden sie durch 1 Z getheilt, welches 2 Z gleich 20 giebt. Kommen aber Gleichungen wie nachstehende,

$$1W = 9Z$$

und man theilt beide Größen durch 1 Z, so erhält man 1 V gleich 9, und es ist also 1 Z gleich 3. Ist die eine Größe zusammengesetzt, wie in folgendem Beispiel,

$$2Z \text{ u } 4 = 12$$

so lernt man den Werth von 1 Z kennen, wenn man 4 ausstreicht und von 12 trennt;

$$\begin{array}{rcr} 2Z \text{ u } \cancel{4} & = & 12 \\ & & 4 \\ \hline 2Z & = & 8 \end{array}$$

denn Gleiches von Gleichem getrennt, läßt Gleiches. Sind hingegen beide Größen zusammengesetzt, wie in nachstehendem Beispiel,

$$6Z \text{ u } 10 = 2Z \text{ u } 18$$

so wird erstlich 10 ausgestrichen und von 18 getrennt, dann auch 2Z ausgestrichen und von 6Z getrennt.

$$\begin{array}{rcr} 6Z \text{ u } \cancel{10} & = & \cancel{2}Z \text{ u } 18 \\ 2 & & 10 \\ \hline 4Z & = & 8 \end{array}$$

Ist nur die eine Größe zusammengesetzt, enthält aber Abgezähltes, wie in folgendem Beispiel,

$$2Z \text{ w } 8 = 12$$

so wird 8 ausgestrichen und mit 12 zusammengesetzt;

$$\begin{array}{rcl} 2Z \text{ w } 8 &=& 12 \\ & & 8 \\ \hline 2Z &=& 20 \end{array}$$

denn Gleiches durch Gleiches vergrößert, giebt Gleiches. Aber Abgezähltes wegnehmen ist dasselbe als Zugezähltes zusetzen. Sind hingegen beide Größen zusammengesetzt, und enthalten Abgezähltes, wie in nachstehendem Beispiel,

$$3Z \text{ w } 20 = 5Z \text{ w } 80$$

so wird erstlich 20 ausgestrichen und von 80 getrennt, dann auch 5Z ausgestrichen, unter 3Z gesetzt, und 3Z von 5Z getrennt.

$$\begin{array}{lcr} 3Z \text{ w } \cancel{20} &=& \cancel{5}Z \text{ w } 80 \\ 5 & & 20 \\ \hline 2Z &=& 60 \end{array}$$

Diese Gleichung kann aber auch so stehen:

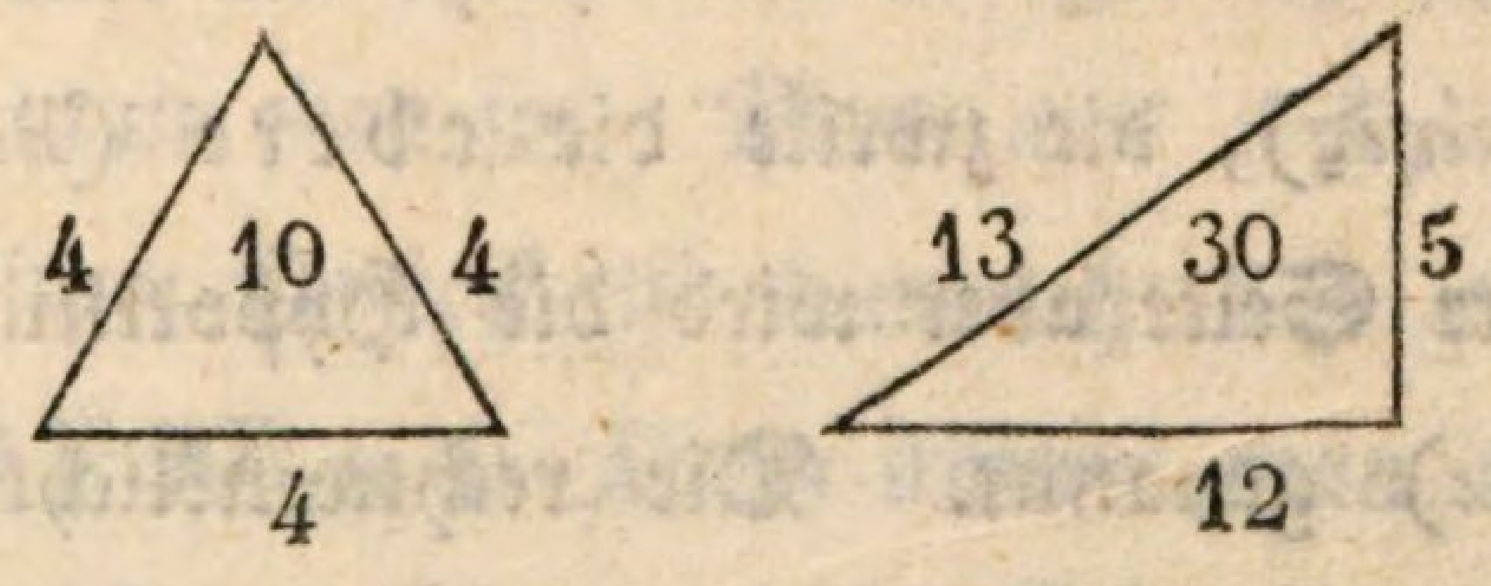
$$\begin{array}{lcr} \cancel{5}Z \text{ w } \cancel{80} &=& 3Z \text{ w } 20 \\ 3 & & 80 \\ \hline 2Z &=& 60 \end{array}$$

Werden Größen mit einander verglichen, die aus mehr als zwei Gliedern bestehen, so verändert dies nichts, indem jedes Glied entweder Zugezähltes oder Abgezähltes ist, und also die gegebenen Regeln dieselbe Anwendung behalten.

6.

Von den Dreieckzahlen.

Die Dreieckzahlen sind entweder gleichwinklicht oder rechtwinklicht.



Ist schlechthin von Dreieckzahlen die Rede, so werden allemal gleichwinklichte darunter verstanden. Eine gleichwinklichte Dreieckzahl hat drei gleiche Seiten. Den Inhalt (d. h. die Dreieckzahl selbst) findet man; wenn man zwei Seiten mit einander vervielfältigt, zu dem Erzeugniß die dritte setzt, und dann von dem Bestand die Hälfte

nimmt. Ist z. B. 4 die Seite, so ist der Inhalt 10; denn 4 mal 4 ist 16, und 4 zu 16 gesetzt macht 20, die Hälfte von 20 aber ist 10. Hieraus geht hervor, daß man umgekehrt von einer gegebenen Dreieckzahl die Seite findet, wenn man das Doppelte der Dreieckzahl nimmt, und von diesem Doppelten die größte darin enthaltene Viereckzahl trennt.

Eine rechtwinklichte Dreieckzahl hat drei ungleiche Seiten, die sich so zu einander verhalten müssen, daß das Viereck der größten, den Vierecken der andern beiden zusammen gleich ist. Von den beiden kleinern Seiten heißt die eine die untere (βάσις), die zweite die obere (κάθετος), die größte Seite aber wird die Hypotenuse (ὑποτείνουσα) genannt. Die rechtwinklichten Dreieckzahlen unterscheiden sich vornehmlich dadurch von allen andern geometrischen Zahlgestalten, daß die Seiten, und nicht der Inhalt, das Dreieck ausmachen. Ein rechtwinklichtes Dreieck wird daher auf folgende Art gefunden: Man nimmt irgend zwei Zahlen; der Bestand ihrer Vierecke giebt die Hypotenuse, der Unterschied dieser nemlichen Vierecke, die zweite Seite, und das Doppelte des

Erzeugnisses beider gewählten Zahlen, die dritte Seite. So geben z. B. die Zahlen 2 und 3 das Dreieck 5, 12, 13; denn der Bestand der Vierecke von 2 und 3 ist 13, der Unterschied dieser Vierecke 5, und das Doppelte des Erzeugnisses von 2 mal 3 ist 12. Um den Inhalt eines rechtwinklichten Dreiecks zu finden, vervielfältigt man die obere und untere Seite mit einander, und nimmt von dem Erzeugniß die Hälfte. Der Inhalt des Dreiecks 5, 12, 13 ist demnach 30; denn 5 mal 12 ist 60, und die Hälfte von 60 ist 30. — Soll ein Dreieck aus zwei unbekannten Größen, z. B. aus 1Z, und 1Z u 1, gebildet werden, so verfährt man eben so. Das aus 1Z, und 1Z u 1 gebildete Dreieck ist demnach 2Z u 1, 2V u 2Z, 2V 2Z u 1. Denn nimmt man 1Z gleich 1 an, so ist der Werth dieses Dreiecks 3, 4, 5; nimmt man 1Z gleich 2 an, so ist der Werth desselben 5, 12, 13 u. s. w.

7.

Aufgaben und deren Lösung.

Erste Abtheilung.

Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen zu zerlegen, deren Unterschied bestimmt ist. — Es sei 100 die gegebene Zahl, und der Unterschied 40. (1 - 1)

Ich setze die kleinere gesuchte Zahl 1 Z. Die größere, da der Unterschied 40 sein soll, ist also 1 Z u 40. Beide Zahlen zusammen aber sollen 100 sein; doch beide zusammen sind 2Z u 40. Folglich ist 2Z u 40 gleich 100. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{rcl} 2Z \text{ u } \not{4}\not{0} & = & 100 \\ & & 40 \\ \hline 2Z & = & 60 \end{array}$$

so bleibt 2Z gleich 60, und es ist also 1 Z gleich 30. — Die kleinere gesuchte Zahl (1 Z) ist demnach 30, die größere (1 Z u 40) 70. Denn 70 ist um 40 größer als 30, und 30 und 70 macht 100.

Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen zu zerlegen, daß der benannte Theil der ersten, mit dem benannten Theil der zweiten, eine gegebene Zahl bildet. — Es werde verlangt 100 in zwei Zahlen zu zerlegen, daß der dritte Theil der ersten mit dem fünften Theil der zweiten 30 mache. (1 - 5)

Ich setze den fünften Theil der zweiten gesuchten Zahl 1Z. Der dritte Theil der ersten Zahl, da beide Theile 30 machen sollen, ist also 30 w 1Z. Vervielfältige ich nun 1Z mit 5, und 30 w 1Z mit 3, so erhalte ich 5Z, und 90 w 3Z als die gesuchten Zahlen selbst. Beide Zahlen zusammen aber sollen 100 sein; doch beide zusammen sind 2Z u 90. Folglich ist 2Z u 90 gleich 100. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

2Z u 90	=	100
		90
2Z	=	10

so bleibt 2Z gleich 10, und es ist also 1Z gleich 5. — Die erste gesuchte Zahl (90 w 3Z) ist demnach 75, und der dritte Theil derselben (30 w 1Z)

25; die zweite gesuchte Zahl (5 Z) ist 25, und der fünfte Theil derselben (1 Z) 5. Aber 25 und 5 macht 30.

Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen zu zerlegen, daß der benannte Theil der ersten um eine gegebene Zahl größer ist, als der benannte Theil der zweiten. — Es werde verlangt 100 in zwei Zahlen zu zerlegen, daß der vierte Theil der ersten um 20 größer sei als der sechste Theil der zweiten. (1 - 6)

Ich setze den sechsten Theil der zweiten gesuchten Zahl 1Z. Der vierte Theil der ersten Zahl, da der Unterschied 20 sein soll, ist also 1Z u 20. Vervielfältige ich nun 1Z mit 6, und 1Z u 20 mit 4, so erhalte ich 6Z, nnd 4Z u 80 als die gesuchten Zahlen selbst. Beide Zahlen zusammen aber sollen 100 sein; doch beide zusammen sind 10Z u 80. Folglich ist 10Z u 80 gleich 100. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

10Z u 8ø = 100
80

10Z = 20

so bleibt 10Z gleich 20, und es ist also 1Z gleich 2. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 88, und der vierte Theil derselben 22; die zweite gesuchte Zahl ist 12, und der sechste Theil derselben 2. Aber 22 ist um 20 größer als 2.

Von derselben Zahl zwei gegebene Zahlen zu trennen, daß die Uiberschüsse ein gegebenes Verhältniß haben. — Es werde verlangt, von derselben Zahl 100 und 20 zu trennen, daß der größere Uiberschuß zum kleinern dreifach sei. (1 - 7)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Trenne ich davon 100, so bleibt der Uiberschuß 1Z w 100; trenne davon 20, so bleibt der Uiberschuß 1Z w 20. Der größere Uiberschuß soll aber das Dreifache des kleinern, und also der kleinere Uiberschuß, dreimal genommen, dem größern gleich sein. Doch 1Z w 100 dreimal genommen, macht 3Z w 300; folglich ist 3Z w 300 gleich 1Z w 20. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

3Z w 300 = 1Z w 20
1Z 300

2Z = 280

so bleibt 2Z gleich 280, und es ist also 1Z gleich 140. — Die gesuchte Zahl ist demnach 140. Denn trenne ich davon 100, so bleibt 40, trenne ich davon 20, so bleibt 120; aber 120 zu 40 ist dreifach.

Zweien gegebenen Zahlen dieselbe Zahl zuzusetzen, daß die Bestände ein gegebenes Verhältniß haben. — Es werde verlangt, dieselbe Zahl zu 100 und zu 20 zu setzen, daß der größere Bestand zum kleinern dreifach sei. (1 - 8)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Vereinige ich sie mit 100, so erhalte ich 1Z u 100, vereinige ich sie mit 20, so erhalte ich 1Z u 20. Der größere Bestand soll aber das Dreifache des kleinern, und also der kleinere Bestand, dreimal genommen, dem größern gleich sein. Doch 1Z u 20 dreimal genommen, macht 3Z u 60; folg-

lich ist 3Z u 60 gleich 1Z u 100. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcl} 3Z \text{ u } 60 & = & 1Z \text{ u } 100 \\ 1 & & 60 \\ \hline 2Z & = & 40 \end{array}$$

so bleibt 2Z gleich 40, und es ist also 1Z gleich 20. — Die gesuchte Zahl ist demnach 20. Denn mit 100 zusammengesetzt giebt sie 120, mit 20 zusammengesetzt 40; aber 120 zu 40 ist dreifach.

Von zweien gegebenen Zahlen dieselbe Zahl zu trennen, daß die Uiberschüsse ein gegebenes Verhältniß haben. — Es werde verlangt, dieselbe Zahl von 100 und von 20 zu trennen, daß der größere Uiberschuß zum kleinern sechsfach sei. (1 - 9)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Trenne ich sie von 100, so bleibt 100 w 1Z, trenne ich sie von 20, so bleibt 20 w 1Z. Der größere Uiberschuß soll aber das Sechsfache des kleinern, und also der kleinere Uiberschuß, sechsmal genommen, dem größern gleich sein. Doch 20 w 1Z sechs-

mal genommen, macht 120 w 6Z; folglich ist 120 w 6Z gleich 100 w 1Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

100 w 1Z = 120 w 6Z
6   100

5Z = 20

so bleibt 5Z gleich 20, und es ist also 1Z gleich 4. — Die gesuchte Zahl ist demnach 4. Denn trenne ich sie von 100, so bleibt 96, trenne ich sie von 20, so bleibt 16; aber 96 zu 16 ist sechsfach.

Wenn zwei Zahlen gegeben sind, dieselbe Zahl der kleinern zuzusetzen und von der größern zu trennen, daß der Bestand zum Uiberschuß ein gegebenes Verhältniß hat. — Es werde verlangt, dieselbe Zahl mit 20 zusammenzusetzen und von 100 zu trennen, daß der Bestand zum Uiberschuß vierfach sei. (1 - 10)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Vereinige ich sie mit 20, so erhalte ich 1Z u 20, trenne

ich sie von 100, so bleibt 100 w 1Z. Der Bestand soll aber das Vierfache des Uiberschusses, und also der Uiberschuß, viermal genommen, dem Bestande gleich sein. Doch 100 w 1Z viermal genommen, macht 400 w 4Z; folglich ist 400 w 4Z gleich 1Z u 20. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

1Z u 20	=	400 w 4Z
4		20
5Z	=	380

so bleibt 5Z gleich 380, und es ist also 1Z gleich 76. — Die gesuchte Zahl ist demnach 76. Denn setze ich sie mit 20 zusammen, so erhalte ich 96, trenne ich sie von 100, so bleibt 24; aber 96 zu 24 ist vierfach.

Von zweien gegebenen Zahlen die eine derselben Zahl zuzusetzen, die andere davon zu trennen, daß der Bestand zum Uiberschuß ein gegebenes Verhältniß hat. — Es werde verlangt, 20 der-

selben Zahl zuzusetzen und 100 davon zu trennen, daß der Bestand zum Uiberschuß dreifach sei. (1 - 11)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Vereinige ich damit 20, so erhalte ich 1Z u 20, trenne ich davon 100, so bleibt 1Z w 100. Der Bestand soll aber das Dreifache des Uiberschusses, und also der Uiberschuß, dreimal genommen, dem Bestande gleich sein. Doch 1Z w 100 dreimal genommen, macht 3Z w 300; folglich ist 3Z w 300 gleich 1Z u 20. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

3Z w 300	=	1Z	u	20
1				300
2Z	=			320

so bleibt 2Z gleich 320, und es ist also 1Z gleich 160. — Die gesuchte Zahl ist demnach 160. Denn 20 dazugesetzt giebt 180, und 100 davongenommen 60; aber 180 ist dreifach zu 60.

Eine gegebene Zahl zweimal in zwei Zahlen zu theilen, daß die Zahlen der ersten und zweiten

Theilung gegebene Verhältnisse haben. — Es sei 100 die gegebene Zahl, welche zweimal in zwei Zahlen getheilt werden soll. Die größere Zahl der ersten Theilung sei doppelt zur kleinern der zweiten Theilung, und die größere Zahl der zweiten Theilung dreifach zur kleinern der ersten Theilung. (1 - 12)

Ich setze die kleinere gesuchte Zahl der zweiten Theilung 1Z. Die größere der ersten Theilung, da sie das Doppelte der vorigen sein soll, ist also 2Z; die kleinere Zahl derselben Theilung, da die gegebene Zahl 100 ist, ist 100 w 2Z, und die größere Zahl der zweiten Theilung, da sie das Dreifache der vorigen sein soll, 300 w 6Z. Es sollen aber die beiden Zahlen der zweiten Theilung zusammen 100 sein; doch beide zusammen sind 300 w 5Z. Folglich ist 300 w 5Z gleich 100. Trenne ich nun gleiches von Gleichem,

~~300~~ w 5Z = 100
300
—————————
5Z = 200

so bleibt 5Z gleich 200, und es ist also 1Z gleich 40. — Die größere Zahl der ersten Theilung ist

demnach 80, die kleinere 20; die größere Zahl der zweiten Theilung 60, die kleinere 40. Aber 80 zu 40 ist doppelt, und 60 zu 20 ist dreifach.

Eine gegebene Zahl dreimal in zwei Zahlen zu theilen, daß die Zahlen der drei Theilungen gegebene Verhältnisse haben. — Es sei 100 die gegebene Zahl, welche dreimal in zwei Zahlen getheilt werden soll. Die größere Zahl der ersten Theilung sei dreifach zur kleinern der zweiten Theilung, die größere Zahl der zweiten Theilung sei doppelt zur kleinern der dritten Theilung, und die größere Zahl der dritten Theilung sei vierfach zur kleinern der ersten Theilung. (1 - 13)

Ich setze die kleinere gesuchte Zahl der dritten Theilung 1Z. Die größere Zahl der zweiten Theilung, da sie das Doppelte der vorigen sein soll, ist also 2Z; die kleinere Zahl derselben Theilung aber, da die gegebene Zahl 100 ist, ist 100 w 2Z. Ferner, die größere Zahl der ersten Theilung, da sie das Dreifache der vorigen sein soll, ist 300 w 6Z, und die kleinere Zahl derselben Theilung, da die gegebene Zahl 100 ist, ist 6Z

w 200; die größere Zahl der dritten Theilung aber, da sie das Vierfache der vorigen sein soll, ist 24Z w 800. Es sollen aber die beiden Zahlen der dritten Theilung zusammen 100 sein; doch beide zusammen sind 25Z w 800. Folglich ist 25Z w 800 gleich 100. Setze ich nun das Abgezählte zusammen,

25Z w 800 = 100
800

25Z = 900

so bleibt 25Z gleich 900, und es ist also 1Z gleich 36. — Die größere Zahl der ersten Theilung ist demnach 84, die kleinere 16; die größere Zahl der zweiten Theilung 72, die kleinere 28; die größere Zahl der dritten Theilung 64, die kleinere 36. Aber 84 zu 28 ist dreifach, 72 zu 36 doppelt, und 64 zu 16 vierfach.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn gegenseitig eine benannte Zahl getrennt und zugesetzt wird, die Bestände und Uiberschüsse gegebene Verhältnisse haben. — Es werde verlangt, von der

ersten Zahl 30 zu trennen und der zweiten zuzusetzen, daß der Bestand zum Uiberschuß doppelt sei, dann wieder von der zweiten Zahl 50 zu trennen und der ersten zuzusetzen, daß der Bestand zum Uiberschuß dreifach sei. (1 - 15)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z. Trenne ich davon 30, so bleibt der Uiberschuß 1Z w 30. Die zweite Zahl mit 30 zusammengesetzt, da der Bestand das Doppelte des Uiberschusses sein soll, ist also 2Z w 60, und die zweite gesuchte Zahl selbst folglich 2Z w 90. Ferner, trenne ich 50 von 2Z w 90, so bleibt 2Z w 140, setze ich 50 mit 1Z zusammen, so kommt 1Z u 50. Der Bestand soll aber das Dreifache des Uiberschusses, und also der Uiberschuß, dreimal genommen, dem Bestande gleich sein. Doch 2Z w 140 dreimal genommen, macht 6Z w 420; folglich ist 6Z w 420 gleich 1Z u 50. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcl} 6Z \text{ w } 420 & = & 1Z \text{ u } 50 \\ 1 & & 420 \\ \hline 5Z & = & 470 \end{array}$$

so bleibt 5Z gleich 470, und es ist also 1Z gleich 94. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 94, die zweite 98. Denn 30 von 94 getrennt giebt 64, mit 98 zusammengesetzt 128; aber 128 zu 64 ist doppelt. Ferner, 50 von 98 getrennt giebt 48, mit 94 zusammengesetzt, 144; aber 144 zu 48 ist dreifach.

Drei Zahlen zu finden, daß zwei und zwei zusammengesetzt, eine gegebene Zahl bilden. — Es werde verlangt, daß die erste Zahl mit der zweiten zusammengesetzt 20, die zweite mit der dritten zusammengesetzt 30, und die dritte mit der ersten zusammengesetzt 40 mache. (1 - 16)

Ich setzte den Bestand aller drei gesuchten Zahlen 1Z. Die dritte Zahl, da die ersten beiden zusammen 20 sein sollen, ist also 1Z w 20. Aus demselben Grunde ist die erste Zahl 1Z w 30, die zweite 1Z w 40. Der Bestand aller drei Zahlen aber soll 1Z sein; doch der Bestand aller drei ist 3Z w 90. Folglich ist 3Z w 90 gleich 1Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

1Z = 3Z w 90

3

2Z = 90

so bleibt 2Z gleich 90, und es ist also 1Z gleich 45. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 15, die zweite 5, die dritte 25. Denn 15 und 5 macht 20, 5 und 25 macht 30, und 25 und 15 macht 40.

Vier Zahlen zu finden, daß drei und drei zusammengesetzt, eine gegebene Zahl bilden. — Es werde verlangt, daß die erste Zahl mit den beiden folgenden zusammengesetzt 20, die zweite mit den beiden folgenden zusammengesetzt 22, die dritte mit den beiden folgenden zusammengesetzt 24, und die vierte mit den beiden folgenden zusammengesetzt 27 mache. (1 - 17)

Ich setze den Bestand aller vier gesuchten Zahlen 1Z. Die vierte Zahl, da die ersten drei zusammen 20 sein sollen, ist also 1Z w 20. Aus demselben Grunde ist die erste Zahl 1Z w 22, die zweite 1Z w 24, und die dritte 1Z w 27.

Der Bestand aller vier Zahlen aber soll 1Z sein; doch der Bestand aller vier ist 4Z w 93. Folglich ist 4Z w 93 gleich 1Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{l} 1Z = 4Z \text{ w } 93 \\ 4 \\ \hline 3Z = 93 \end{array}$$

so bleibt 3Z gleich 93, und es ist also 1Z gleich 31. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 9, die zweite 7, die dritte 4, die vierte 11. Denn 9, 7 und 4 macht 20; 7, 4 und 11 macht 22; 4, 11 und 9 macht 24; und 11, 9 und 7 macht 27.

Drei Zahlen zu finden, das zwei und zwei zusammengesetzt um eine gegebene Zahl größer sind als die einzelne Zahl. — Es werde verlangt, daß die erste Zahl mit der zweiten zusammengesetzt um 20 größer als die dritte, die zweite Zahl mit der dritten zusammengesetzt um 30 größer als die erste, und die dritte Zahl mit der ersten zusammengesetzt um 40 größer als die zweite sei. (1 - 18)

Ich setze den Bestand aller drei gesuchten Zahlen 2Z. Nun soll aber die Zahl, welche aus der Zusammensetzung der ersten und zweiten Zahl entsteht, um 20 größer sein als die dritte. Trennt man aber den Unterschied zweier Zahlen von ihrem Bestand, so erhält man das Doppelte der kleinern Zahl. Demnach ist das Doppelte der dritten gesuchten Zahl 2Z w 20, und die dritte Zahl selbst 1Z w 10. Aus demselben Grunde ist die erste Zahl 1Z w 15, und die dritte 1Z w 20. Der Bestand aller drei Zahlen aber soll 2Z sein; doch der Bestand aller drei ist 3Z w 45. Folglich ist 3Z w 45 gleich 2Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

2Z = 3Z w 45
3
1Z = 45

so bleibt 1Z gleich 45. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 30, die zweite 25, die dritte 35. Denn der Bestand der ersten und zweiten Zahl ist 55, der zweiten und dritten 60, der dritten und ersten 65. Aber 55 ist um 20 größer als die dritte Zahl, 60

um

um 30 größer als die erste Zahl, und 65 um 40 größer als die zweite Zahl.

Vier Zahlen zu finden, daß, drei und drei zusammengesetzt, um eine gegebene Zahl größer sind als die einzelne Zahl. — Es werde verlangt, daß die erste Zahl mit den beiden folgenden zusammengesetzt um 20 größer als die vierte, die zweite Zahl mit den beiden folgenden zusammengesetzt um 30 größer als die erste, die dritte Zahl mit den beiden folgenden zusammengesetzt um 40 größer als die zweite, und die vierte Zahl mit den beiden folgenden zusammengesetzt um 50 größer als die dritte sei. (1 - 20)

Ich setze den Bestand aller vier gesuchten Zahlen 2Z. Da nun die erste und die beiden folgenden Zahlen um 20 größer sein sollen als die vierte, so ist, aus demselben Grunde wie in voriger Aufgabe, die vierte gesuchte Zahl 1Z w 10, die erste 1Z w 15, die zweite 1Z w 20, und die dritte 1Z w 25. Der Bestand aller vier Zahlen aber soll 2Z sein; doch der Bestand aller

vier ist 4Z w 70. Folglich ist 4Z w 70 gleich 2Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

2Z = 4Z w 70
4
―――――――
2Z = 70

so bleibt 2Z gleich 70, und es ist also 1Z gleich 35. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 20, die zweite 15, die dritte 10, die vierte 25. Denn der Bestand der ersten und beiden folgenden Zahlen ist 45, der zweiten und beiden folgenden 50, der dritten und beiden folgenden 55, der vierten und beiden folgenden 60. Aber 45 ist um 20 größer als die vierte Zahl, 50 um 30 größer als die erste Zahl, 55 um 40 größer als die zweite Zahl, und 60 um 50 größer als die dritte Zahl.

8.

Aufgaben und deren Lösung.

Zweite Abtheilung.

Zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte zu finden, welche, mit beiden vervielfältigt, die eine

Zahl zum Viereck die andere zu dessen Seite erhebt. — Es mögen 200 und 5 die gegebenen Zahlen sein. (1 - 29)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Vervielfältige ich damit 200, so erhalte ich 200Z; vervielfältige ich damit 5, so erhalte ich 5Z. Es soll aber 200Z ein Viereck, und 5Z dessen Seite sein; doch 5Z, mit sich selbst vervielfältigt, giebt 25V. Folglich ist 25V gleich 200Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 25Z gleich 200, und es ist also 1Z gleich 8. — Die gesuchte Zahl ist demnach 8. Denn 8 mal 200 ist 1600, und 8 mal 5 ist 40; aber 40 ist die Seite des Vierecks 1600.

Zwei Zahlen zu finden, deren Bestand sowohl als auch der Unterschied ihrer Vierecke gegeben ist. — Es sei der Bestand beider Zahlen 20, und der Unterschied ihrer Vierecke 80. (1 - 32)

Ich setze den Unterschied beider gesuchten Zahlen 2Z. Da aber beide Zahlen zusammen 20 sein sollen, so ist die Hälfte ihres Bestandes 10. Wird jetzt die Hälfte des Unterschiedes, nemlich

1Z, der einen Hälfte des Bestandes zu: der andern abgezählt, so kommt die größere Zahl 1Z u 10, die kleinere 10 w 1Z; der Bestand aber bleibt 20, der Unterschied 2Z. Nun soll der Unterschied der Vierecke 80 sein. Vervielfältigt man aber den Unterschied zweier Zahlen mit ihrem Bestand, so erhält man den Unterschied ihrer Vierecke. Doch 20 mal 2Z ist 40Z; folglich ist 40Z gleich 80, und also 1Z gleich 2. — Die größere gesuchte Zahl ist demnach 12, die kleinere 8, und die Vierecke davon sind 144 und 64; aber der Bestand von 12 und 8 ist 20, der Unterschied von 144 und 64 ist 80.

Zwei Zahlen zu finden, deren Verhältniß gegeben ist, wie auch das Verhältniß des Unterschieds ihrer Vierecke zu ihrem eigenen Unterschied. — Das Verhältniß der Zahlen sei dreifach, und das Verhältniß des Unterschieds der Vierecke zum Unterschied der Zahlen, zwölffach. (1 - 37)

Ich setze die kleinere gesuchte Zahl 1Z. Die größere ist also 3Z, und die Vierecke von beiden 1V, und 9V. Es soll aber der Unterschied der

Vierecke zum Unterschied der Zahlen zwölffach sein; doch der Unterschied der Zahlen ist 2Z, der Unterschied ihrer Vierecke 8V. Folglich ist 8V zwölffach zu 2Z, und daher 24Z gleich 8V. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 8Z gleich 24, und es ist also 1Z gleich 3. — Die kleinere gesuchte Zahl ist demnach 3, die größere 9. Denn der Unterschied beider Zahlen ist 6, der Unterschied ihrer Vierecke 72; aber 72 zu 6 ist zwölffach.

Zwei Viereckzahlen zu finden, deren Unterschied gegeben ist. — Es sei der Unterschied 57.

(2 - 11)

Ich setze die Seite der kleinern gesuchten Zahl 1Z. Als Seite der größern nehme ich 1Z und verbinde damit noch irgend eine Zahl, die jedoch so beschaffen sein muß, daß das Viereck davon kleiner als der gegebene Unterschied ist. Es sei also die Seite der zweiten Zahl 1Z u 3. Das Viereck der ersten Seite ist daher 1V, das Viereck der zweiten Seite 1V 6Z u 9. Der Unterschied beider Vierecke aber soll 57 sein; doch der Unterschied beider ist 6Z u 9. Folglich ist

6Z u 9 gleich 57. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$6Z \text{ u } 9 = 57$$
$$9$$
$$6Z = 48$$

so bleibt 6Z gleich 48, und es ist also 1Z gleich 8. — Die erste gesuchte Viereckzahl ist demnach 64, die zweite 121; denn 121 ist um 57 größer als 64.

Eine Zahl zu finden, durch deren Zusatz zwei gegebene Zahlen Vierecke werden. — Es mögen 3 und 10 die gegebenen Zahlen sein. (2 - 12)

Ich setze die gesuchte Zahl 1Z. Vereinige ich sie mit 3, so erhalte ich 1Z u 3, vereinige ich sie mit 10, so erhalte ich 1Z u 10. Nun sollen aber die gegebenen Zahlen durch den Zusatz von 1Z Vierecke werden; folglich sind 1Z u 3, und 1Z u 10 Vierecke. Um den Werth derselben kennen zu lernen, sucht man zwei Vierecke, deren Unterschied mit dem Unterschied von 1Z u 3, und

1Z u 10 einerlei ist. Die Seiten solcher Vierecke findet man auf folgende Art: Man nimmt zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, als Erzeugniß den Unterschied von 1Z u 3, und 1Z u 10 geben. Die Hälfte des Unterschieds dieser Zahlen ist die Seite des kleinern Vierecks, die Hälfte des Bestandes derselben, die Seite des größern. Da nun 7 der Unterschied von 1Z u 3, und 1Z u 10 ist, so sind 1 und 7 diejenigen Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, den Unterschied beider Vierecke geben. Die Hälfte des Unterschieds aber von 1 und 7 ist 3, und die Hälfte des Bestandes von 1 und 7 ist 4. Es sind also 3 und 4 die Seiten der gesuchten Vierecke. Dieser Fall wird nun eine doppelte Gleichung genannt; denn wir gebrauchen nur, um den Werth von 1Z u 3, und 1Z u 10 kennen zu lernen, das Viereck einer der gefundenen Seiten, und können daher das kleinere oder größere wählen. Ich wähle das kleinere, und da von 3 das Viereck 9 ist, so ist 1Z u 3 gleich 9. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$1Z \text{ u } 3 = 9$$
$$3$$
$$1Z = 6$$

so bleibt 1Z gleich 6. — Die gesuchte Zahl ist demnach 6. Denn der Bestand von 6 und 3 ist das Viereck 9, von 6 und 10, das Viereck 16.

Eine Zahl zu finden, daß, wenn zwei gegebene Zahlen davon getrennt werden, die Uiberschüsse Vierecke sind. — Es mögen 6 und 21 die gegebenen Zahlen sein. (2 - 14)

Ich setze die gesuchte Zahl, da der Uiberschuß, wenn 6 davon getrennt wird, ein Viereck sein soll, 1V u 6. Es soll aber auch 21 davon getrennt werden, und der Uiberschuß ein Viereck sein; doch trenne ich 21 von 1V u 6, so bleibt 1V w 15. Es ist also auch 1V w 15 ein Viereck. Jetzt nehme ich willkührlich 1Z, und zähle davon irgend eine Zahl ab; etwa 3. Das Viereck von 1Z w 3 ist aber 1V u 9 w 6Z, und dies Viereck betrachte ich als gleich mit 1V w 15. Setze ich

nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

1V u 9 w 6Z = 1V w 15
1 9

6Z = 24

so bleibt 6Z gleich 24, und es ist also 1Z gleich 4. — Die gesuchte Zahl ist demnach 22. Denn trenne ich davon 6, so bleibt das Viereck 16; trenne ich davon 21, so bleibt das Viereck 1.

Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen zu zerlegen, daß beide, wenn jeder von ihnen dasselbe Viereck zugesetzt wird, Vierecke werden. — Es sei 33 die gegebene Zahl. (2 - 15)

Ich nehme irgend zwei Zahlen, und verbinde jede derselben mit 1Z. Diese Zahlen müssen jedoch so beschaffen sein, daß ihre Vierecke, zusammengesetzt, eine kleinere Zahl als die gegebene bilden. Es mögen 2 und 3 diese Zahlen sein, und ich setze also 1Z u 2, und 1Z u 3. Die Vierecke davon sind 1V 4Z u 4, und 1V 6Z u 9. Trenne ich nun von jedem dieser Vierecke

1V (welches das zuzusetzende Viereck ist) so bleiben die Uiberschüsse 4Z u 4, und 6Z u 9 als die gesuchten Zahlen selbst. Beide Zahlen zusammen aber sollen 33 sein; doch beide zusammen sind 10Z u 13. Folglich ist 10Z u 13 gleich 33. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

10Z u 13	=	33
		13
10Z	=	20

so bleibt 10Z gleich 20, und es ist also 1Z gleich 2. — Die kleinere gesuchte Zahl ist demnach 12, die größere 21, und das zuzusetzende Viereck 4. Denn der Bestand von 12 und 4 ist das Viereck 16, von 21 und 4, das Viereck 25.

Zwei Zahlen in benanntem Verhältniß zu finden, daß beide, wenn jeder von ihnen ein gegebenes Viereck zugesetzt wird, Vierecke werden. — Es sei das Verhältniß der Zahlen dreifach, und das zuzusetzende Viereck 4. (2 - 17)

Ich nehme 1Z und verbinde damit 2, als die Seite des gegebenen Vierecks. Das Viereck von 1Z u 2 aber ist 1V 4Z u 4. Trenne ich nun davon 4, so bleibt 1V u 4Z als die kleinere gesuchte Zahl selbst. Die größere gesuchte Zahl, da sie das Dreifache der kleinern sein soll, ist also 3V u 12Z. Es soll aber auch die größere Zahl mit 4 zusammengesetzt zum Viereck werden; folglich ist 3V 12Z u 4 ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 2Z w 2, nemlich 4V u 4 w 8Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

4V	u	4	w	8Z	=	3V	12Z	u	4
3							8		4
1V					=		20Z		

so bleibt 1V gleich 20Z, und durch 1Z getheilt, 1Z gleich 20. — Die kleinere gesuchte Zahl ist demnach 480, die größere 1440. Denn 1440 zu 480 ist dreifach, und der Bestand von 480 und 4 ist das Viereck 484, von 1440 und 4, das Viereck 1444.

Drei Viereckzahlen zu finden, daß der Unterschied der größten und mittelsten, zum Unterschied der mittelsten und kleinsten, ein gegebenes Verhältniß hat. — Es sei das Verhältniß der Unterschiede dreifach. (2 - 20)

Ich setze die kleinste gesuchte Zahl 1V; die mittelste aber (nach der Seite 1Z u 1) 1V 2Z u 1. Der Unterschied beider Zahlen ist also 2Z u 1. Da nun der Unterschied der mittelsten und größten Zahl das Dreifache von 2Z u 1 sein soll, so ist 1V 8Z u 4 die größte gesuchte Zahl, und ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 1Z u 3, nemlich 1V 6Z u 9. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

1V 8Z u 4	=	1V 6Z u 9	
6		1	4
2Z	=		5

so bleibt 2Z gleich 5, und es ist also 1Z gleich 5^{2}. — Die größte gesuchte Viereckzahl ist demnach 121^{4}, die mittelste 49^{4}, und die kleinste 25^{4}. Denn 121 ist um 72 größer als 49, und 49 wieder um 24 größer als 25; aber 72 zu 24 ist dreifach.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn die größere von dem Viereck der kleinern, und die kleinere von dem Viereck der größern getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind. (2 - 22)

Ich setze die kleinere gesuchte Zahl 1Z u 1. Ihr Viereck ist daher 1V 2Z u 1. Nun soll die größere Zahl von 1V 2Z u 1 getrennt werden, und der Uiberschuß ein Viereck sein. Trenne ich aber davon 2Z u 1, so wird diese Bedingung erfüllt, und es ist also 2Z u 1 die größere gesuchte Zahl. Ferner soll auch die kleinere Zahl von dem Viereck der größern getrennt werden, und der Uiberschuß ein Viereck sein. Das Viereck der größern Zahl aber ist 4V 4Z u 1, trenne ich davon 1Z u 1, so bleibt 4V u 3Z. Es ist also auch 4V u 3Z ein Viereck. Jetzt nehme ich irgend eine Menge Z, deren Viereck größer als 4V ist; etwa 3Z. Das Viereck aber von 3Z ist 9V, und dies Viereck betrachte ich als gleich mit 4V u 3Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$9V = 4V \text{ u } 3Z$$
$$4$$
$$\overline{5V \quad = \quad 3Z}$$

so bleibt 5V gleich 3Z, und durch 1Z getheilt, 5Z gleich 3, also 1Z gleich $3^{\underline{5}}$. — Die kleinere gesuchte Zahl ist demnach $8^{\underline{5}}$, die größere $11^{\underline{5}}$, und ihre Vierecke sind $64^{\underline{25}}$ und $121^{\underline{25}}$. Wird nun die kleinere Zahl von $121^{\underline{25}}$ getrennt, so bleibt das Viereck $81^{\underline{25}}$; wird die größere Zahl von $64^{\underline{25}}$ getrennt, das Viereck $9^{\underline{25}}$.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn das Viereck einer jeden mit beiden Zahlen zusammengesetzt wird, die Bestände Vierecke sind. (2 - 23)

Ich setze die kleinere gesuchte Zahl 1Z, die größere 1Z u 1. Beide zusammeu sind also 2Z u 1. Setze ich nun 2Z u 1 mit dem Viereck der kleinern Zahl (1V) zusammen, so erhalte ich 1V 2Z u 1 als Viereck. Es soll aber auch 2Z u 1 mit dem Viereck der größten Zahl zusammengesetzt werden, und der Bestand ein Viereck sein. Doch 2Z u 1 mit 1V 2Z u 1 zusammengesetzt, macht 1V 4Z u 2, und es ist also auch 1V 4Z u 2 ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 1Z w 2, nemlich 1V u 4 w 4Z.

Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$1V\ 4Z\ u\ 2 = 1V\ u\ 4\ w\ 4Z$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ \hline 8Z & = & 2 \end{array}$$

so bleibt 8Z gleich 2, und es ist also 1Z gleich $2^{\underline{8}}$ oder $1^{\underline{4}}$. — Die kleinere gesuchte Zahl ist demnach $1^{\underline{4}}$, die grössere $5^{\underline{4}}$, und der Bestand beider $6^{\underline{4}}$. Wird nun $6^{\underline{4}}$ mit dem Viereck der kleinern Zahl zusammengesetzt, so entsteht das Viereck $25^{\underline{16}}$; wird $6^{\underline{4}}$ mit dem Viereck der grössern Zahl zusammrngesetzt, das Viereck $49^{\underline{16}}$.

Zwei Zahlen zu finden, daß jede, mit dem Viereck des Bestandes beider Zahlen zusammengesetzt, ein Viereck bildet. (2 - 25)

Ich setze willkührlich die kleinere gesuchte Zahl 3V, die grössere 8V, und das Viereck des Bestandes beider Zahlen 1V. Der Bestand beider Zahlen aber ist 11V, und das Viereck davon $121^{d}V$. Folglich ist $121^{d}V$ gleich 1V, und daher

auch (als Seiten dieser Vierecke) 11V gleich 1Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 11Z gleich 1, und es ist also 1Z gleich $1^{\underline{11}}$. — Die kleinere gesuchte Zahl ist demnach $3^{\underline{121}}$, die größere $8^{\underline{121}}$ und das Viereck des Bestandes beider Zahlen $121^{\underline{14641}}$. Wird nun die kleinere Zahl mit $121^{\underline{14641}}$ zusammengesetzt, so entsteht das Viereck $484^{\underline{14641}}$; wird die größere Zahl mit $121^{\underline{14641}}$ zusammengesetzt das Viereck $1089^{\underline{14641}}$.

Drei Zahlen zu finden, das, wenn jede von dem Viereck des Bestandes aller drei Zahlen getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind. (3 - 3)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 7V, die zweite 12V, die dritte 15V, und das Viereck des Bestandes aller drei Zahlen 16V. Der Bestand aller drei Zahlen aber ist 34V, und das Viereck davon 1156^{d}V. Folglich ist 1156^{d}V gleich 16V, und daher auch (als Seiten dieser Vierecke) 34V gleich 4Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 34Z gleich 4, und es ist also 1Z gleich $4^{\underline{34}}$ oder $2^{\underline{17}}$. Die erste gesuchte Zahl ist demnach $28^{\underline{289}}$ die zweite $48^{\underline{289}}$, die dritte $60^{\underline{289}}$, und das

Viereck

Viereck des Bestandes aller drei Zahlen $64^{\underline{289}}$. Werden nun die drei Zahlen von $64^{\underline{289}}$ getrennt, so bleiben die Vierecke $36^{\underline{289}}$, $16^{\underline{289}}$, $4^{\underline{289}}$.

Von einer gegebenen Zahl, die aus zwei Vierecken besteht, einen Gleichwerth zu finden, welcher sich wieder in zwei Vierecke zerlegen läßt. — Es sei 13 die gegebene Zahl, indem sie aus den Vierecken 4 und 9 besteht. (2 - 10)

Ich setze die Seite des ersten gesuchten Vierecks 1Z, und verbinde damit die Seite der Zahl 4; also 1Z u 2. Das Viereck selbst ist demnach 1V 4Z u 4. Als Seite des zweiten gesuchten Vierecks nehme ich irgend eine Menge Z, etwa 2Z, und zähle die Seite der Zahl 9 davon ab; also 2Z w 3. Das Viereck selbst ist demnach 4V u 9 w 12Z. Beide Vierecke zusammen aber sollen 13 sein; doch beide zusammen sind 5V u 13 w 8Z. Folglich ist 5V u 13 w 8Z gleich 13. Bringe ich nun alles auf die kleinsten Glieder, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{rcl} 5Z \text{ u } \not{5} & = & 13 \\ & & 5 \\ \hline 5Z & = & 8 \end{array}$$

so bleibt 5Z gleich 8, und es ist also 1Z gleich $8^{\underline{5}}$. — Der gesuchte Gleichwerth von 13 ist demnach $325^{\underline{25}}$, und die Vierecke, in welche er zerlegt werden kann, sind $324^{\underline{25}}$ und $1^{\underline{25}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn das Viereck einer jeden von dem Bestand aller drei Zahlen getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind. (3 - 1)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z, die zweite 2Z. Der Bestand ihrer Vierecke ist demnach 5V, und dies sei auch der Bestand aller drei gesuchten Zahlen. Um die dritte Zahl zu finden nehme ich irgend einen Gleichwerth von 5, welcher sich in zwei Vierecke zerlegen läßt, etwa $125^{\underline{25}}$; denn $125^{\underline{25}}$ kann in $4^{\underline{25}}$ und $121^{\underline{25}}$ zerlegt werden. Die Seite von $4^{\underline{25}}$V, nemlich $2^{\underline{5}}$Z, ist also die dritte gesuchte Zahl. Nun soll aber der Bestand aller drei Zahlen 5V sein; doch der Bestand aller drei ist $17^{\underline{5}}$Z. Folglich ist $17^{\underline{5}}$Z gleich 5V, und in ganzen Zahlen, 25V gleich 17Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 25Z gleich 17, und es ist also 1Z gleich $17^{\underline{25}}$.

Die erste gesuchte Zahl ist demnach $85^{\underline{125}}$, die zweite $170^{\underline{125}}$, die dritte $34^{\underline{125}}$, und der Bestand aller drei Zahlen $289^{\underline{125}}$. Werden nun die Vierecke der drei Zahlen von $289^{\underline{125}}$ getrennt, so bleiben die Vierecke $28900^{\underline{15625}}$, $7225^{\underline{15625}}$, $34969^{\underline{15626}}$.

Drei Zahlen zu finden, welche sowohl alle drei, als auch zwei und zwei zusammengesetzt, Vierecke bilden. (3 - 7)

Ich setze den Bestand aller drei gesuchten Zahlen (nach der Seite 1Z u 1) 1V 2Z u 1. Der Bestand der ersten und zweiten Zahl, da er ein Viereck sein soll, ist also 1V, und die dritte gesuchte Zahl 2Z u 1. Ferner, den Bestand der zweiten und dritten Zahl setze ich (nach der Seite 1Z w 1) 1V u 1 w 2Z. Wird nun die dritte Zahl, nemlich 2Z u 1, von diesem Viereck getrennt, so bleibt 1V w 4Z als die zweite gesuchte Zahl. Da nun der Bestand der ersten und zweiten Zahl 1V, und die zweite Zahl 1V w 4Z ist, so bleibt 4Z als die erste gesuchte Zahl. Endlich soll auch der Bestand der dritten und ersten Zahl

ein Viereck sein. Dies Viereck sei 121. Doch der Bestand der dritten und ersten Zahl ist 6Z u 1; folglich ist 6Z u 1 gleich 121. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcr} 6Z \text{ u } 1 & = & 121 \\ & & 1 \\ \hline 6Z & = & 120 \end{array}$$

so bleibt 6Z gleich 120, und es ist also 1Z gleich 20. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 80, die zweite 320, die dritte 41. Denn der Bestand aller drei Zahlen ist das Viereck 441; der Bestand der ersten und zweiten, das Viereck 400; der Bestand der zweiten und dritten, das Viereck 361; und der Bestand der dritten und ersten, das Viereck 121.

Drei Zahlen zu finden, daß alle drei von gleichem Unterschied, und zwei und zwei zusammengesetzt, Vierecke sind. (3 - 9)

Zur Lösung dieser Aufgabe sind zuförderst drei Viereckzahlen von gleichem Unterschied erfor-

derlich; man findet sie auf folgende Art: Ich setze die erste Zahl 1V, die zweite (nach der Seite 1Z u 1) 1V w 2Z u 1, und es ist also der Unterschied beider Zahlen 2Z u 1. Setze ich nun diesen Unterschied wieder mit der zweiten Zahl zusammen, so erhalte ich 1V 4Z u 2 als die dritte Zahl. Diese Zahl aber, da sie ebenfalls ein Viereck sein soll, sei gleich dem Viereck 1V u 64 w 16Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

1V u 64 w 16Z = 1V 4Z u 2
1 4 64

20Z = 62

so bleibt 20Z gleich 62, und es ist also 1Z gleich $62^{\underline{20}}$ oder $31^{\underline{10}}$. — Die erste Zahl ist demnach (ohne Nenner) 961, die zweite 1681, die dritte 2401. Aus diesen drei Vierecken bilde ich nun die Bestände der drei gesuchten Zahlen, und es sei daher 961 der Bestand der ersten und zweiten Zahl, 2401 der Bestand der zweiten und dritten, und 1681 der Bestand der dritten und ersten. Setze ich nun den Bestand aller drei Zahlen 1Z, so ist 1Z w 961 die dritte, 1Z w 2401 die erste, und 1Z w 1681

die zweite gesuchte Zahl. Es soll aber der Bestand aller drei Zahlen 1Z sein; doch der Bestand aller drei ist 3Z w 5043. Folglich ist 3Z w 5043 gleich 1Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$1Z = 3Z \text{ w } 5043$$
$$3$$
$$\overline{2Z \quad = \quad 5043}$$

so bleibt 2Z gleich 5043, und es ist also 1Z gleich 5043^2 oder $2521 \cdot 1^2$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $120 \cdot 1^2$, die zweite $840 \cdot 1^2$, die dritte $1560 \cdot 1^2$. Denn der gleiche Unterschied dieser Zahlen ist 720, und der Bestand der ersten und zweiten Zahl das Viereck 961; der Bestand der zweiten und dritten, das Viereck 2401; der Bestand der dritten und ersten, das Viereck 1681.

Drei Zahlen zu finden, daß sowohl der Bestand von je zweien, als auch der aller drei, durch den Zusatz einer gegebenen Zahl, Vierecke werden. — Es sei 3 die gegebene Zahl. (3 - 10)

Ich setze den Bestand der ersten und zweiten gesuchten Zahl 1V 4Z u 1, den Bestand der zweiten und dritten 1V 6Z u 6, und den aller drei Zahlen 1V 8Z u 13; denn jeder dieser Bestände wird durch den Zusatz von 3 ein Viereck. Da nun der Bestand aller drei Zahlen 1V 8Z u 13 ist, die ersten beiden Zahlen aber zusammen 1V 4Z u 1 machen, so ist die dritte gesuchte Zahl 4Z u 12. Ferner, da die zweite und dritte Zahl zusammen 1V 6Z u 6 machen, der Bestand aller drei Zahlen aber 1V 8Z u 13 ist, so ist die erste gesuchte Zahl 2Z u 7. Endlich, da die erste und zweite Zahl zusammen 1V 4Z u 1 machen, die erste allein aber 2Z u 7 ist, so ist nothwendig die zweite gesuchte Zahl 1V u 2Z w 6. Es soll aber auch der Bestand der dritten und ersten Zahl durch den Zusatz von 3 ein Viereck werden; doch der Bestand der dritten und ersten Zahl, mit 3 zusammengesetzt, ist 6Z u 22, und also ein Viereck. Dies Viereck sei gleich 100. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

6Z u 22 = 100
22

6Z = 78

so bleibt 6Z gleich 78, und es ist also 1Z gleich 13. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 33, die zweite 189, die dritte 64. Denn die erste und zweite Zahl bilden mit 3 das Viereck 225, die zweite und dritte mit 3 das Viereck 256, die dritte und erste mit 3 das Viereck 100, und alle drei Zahlen mit 3 das Viereck 289.

Drei Zahlen zu finden, daß das Erzeugniß von je zweien, mit der folgenden Zahl zusammengesetzt, ein Viereck ist. (3 - 14)

Es sei das Erzeugniß der ersten und zweiten gesuchten Zahl, mit der dritten zusammengesetzt, das Viereck 1V 6Z u 9. Die dritte gesuchte Zahl ist demnach 9, und das Erzeugniß der ersten und zweiten 1V u 6Z. Die erste gesuchte Zahl ist also 1Z, und die zweite 1Z u 6; denn 1Z mal 1Z u 6 ist 1V u 6Z. Nun soll aber das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl, mit der ersten zusammengesetzt, ebenfalls ein Viereck sein; doch 1Z u 6 mit 9 vervielfältigt giebt 9Z u 54, und 1Z zugesetzt, macht 10Z u 54. Es ist also 10Z u 54 ein Viereck. Ferner soll auch das Er=

zeugniß der dritten und ersten Zahl, mit der zweiten zusammengesetzt, ein Viereck sein; doch 9 mit 1Z vervielfältigt giebt 9Z, und 1Z u 6 zugesetzt, macht 10Z u 6. Folglich ist auch 10Z u 6 ein Viereck. Hier findet demnach eine doppelte Gleichung Statt. Der Unterschied von 10Z u 54, und 10Z u 6 ist aber 48, und zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, diesen Unterschied geben, sind 4 und 12. Die Hälfte des Bestandes von 4 und 12 ist 8, und das Viereck davon 64. Folglich ist 10Z u 54 gleich 64. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

10Z u ~~54~~ = 64
54

10Z = 10

so bleibt 10Z gleich 10, und es ist also 1Z gleich 1. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 1, die zweite 7, und die dritte 9. Denn das Erzeugniß der ersten und zweiten Zahl, mit der dritten zusammengesetzt, giebt das Viereck 16; das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl, mit der ersten zusammengesetzt, das Viereck 64; das Erzeugniß der dritten und ersten Zahl, mit der zweiten zusammengesetzt, das Viereck 16.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn von dem Erzeugniß von je zweien die folgende Zahl getrennt wird, der Uiberschuß ein Viereck ist. (3 - 15)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z, die zweite 1Z u 4. Beide, mit einander vervielfältigt, geben also das Erzeugniß 1V u 4Z. Dies Erzeugniß soll nun, wenn die dritte Zahl davon getrennt wird, ein Viereck sein; es sei daher die dritte gesuchte Zahl 4Z. Nun soll aber, wenn von dem Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl die erste getrennt wird, der Uiberschuß ebenfalls ein Viereck sein; doch 4Z mal 1Z u 4 ist 4V u 16Z und der Uiberschuß, wenn 1Z davon getrennt wird, 4V u 15Z. Es ist also 4V u 15Z ein Viereck. Ferner soll auch, wenn von dem Erzeugniß der dritten und ersten Zahl die zweite getrennt wird, der Uiberschuß ein Viereck sein; doch 4Z mal 1Z ist 4V, und der Uiberschuß, wenn 1Z u 4 davon getrennt wird, 4V w 1Z w 4. Folglich ist auch 4V w 1Z w 4 ein Viereck. Dies bildet wieder eine doppelte Gleichung. Der Unterschied von 4V u 15Z, und 4V w 1Z w 4 ist aber 16Z u 4, und zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, diesen Unterschied geben,

ſind 4, und 4Z u 1. Die Hälfte des Beſtandes von 4, und 4Z u 1 iſt 2Z u 5^{2}, und das Viereck davon 4V 10Z u 25^{4}. Folglich iſt 4V 10Z u 25^{4} gleich 4V u 15Z, und in ganzen Zahlen, 16V u 60Z gleich 16V 40Z u 25. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

16V u 60Z = 16V 40Z u 25
40 16

20Z = 25

ſo bleibt 20Z gleich 25, und es iſt alſo 1Z gleich 25^{20} oder 5^{4}. — Die erſte geſuchte Zahl iſt demnach 5^{4}, die zweite 21^{4}, die dritte 20^{4}. Denn von dem Erzeugniß der erſten und zweiten Zahl die dritte getrennt, läßt das Viereck 25^{16}; von dem Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl die erſte getrennt, das Viereck 400^{16}; von dem Erzeugniß der dritten und erſten Zahl die zweite getrennt, das Viereck 16^{16}.

Drei Zahlen zu finden, daß das Erzeugniß von je zweien, mit dem Viereck der folgenden Zahl zuſammengeſetzt, ein Viereck iſt. (3 - 16)

Ich setze willkührlich die erste gesuchte Zahl 1Z, die zweite 4Z u 4, und die dritte 1. Das Erzeugniß der ersten und zweiten Zahl giebt demnach, mit dem Viereck der dritten zusammengesetzt, das Viereck 4V 4Z u 1; das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl, mit dem Viereck der ersten zusammengesetzt, das Viereck 1V 4Z u 4; das Erzeugniß der dritten und ersten Zahl, mit dem Viereck der zweiten zusammengesetzt, das Viereck 16V 33Z u 16. Dies Viereck betrachte ich als gleich mit dem der Seite 4Z w 5, nemlich 16V u 25 w 40Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

16V u 25 w	40Z	=	16V	33Z u	16
16	33				25
	73Z	=			9

so bleibt 73Z gleich 9, und es ist also 1Z gleich $9^{\underline{73}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $9^{\underline{73}}$, die zweite $328^{\underline{37}}$, die dritte $73^{\underline{73}}$. Denn das Erzeugniß der ersten und zweiten Zahl, mit dem Viereck der dritten zusammengesetzt, giebt das Viereck $8281^{\underline{5329}}$; das Erzeugniß der zweiten und

dritten Zahl, mit dem Viereck der ersten zusammengesetzt, das Viereck $24025^{\underline{5329}}$; das Erzeugniß der dritten und ersten Zahl, mit dem Viereck der zweiten zusammengesetzt, das Viereck $108241^{\underline{5329}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß das Erzeugniß von je zweien, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, ein Viereck ist. (3 - 17)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 4, die zweite 9; denn das Erzeugniß zweier nächsten Viereckzahlen, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, ist immer ein Viereck. Es fehlt also nur noch die dritte Zahl; diese sei 1Z. Das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl giebt demnach, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, das Viereck 10Z u 9; das Erzeugniß der dritten und ersten Zahl, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, das Viereck 5Z u 4. Hier findet also wieder eine doppelte Gleichung Statt. Der Unterschied von 10Z u 9, und 5Z u 4 ist aber 5Z u 5, und zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, diesen Unterschied geben, sind 5, und 1Z u 1. Die Hälfte des Bestandes von 5, und 1Z u 1 ist $1^{\underline{2}}$Z u 3,

und das Viereck davon $\frac{1}{4}$V 3Z u 9. Folglich ist $\frac{1}{4}$V 3Z u 9 gleich 10Z u 9, und in ganzen Zahlen, 1V 12Z u 36 gleich 40Z u 36. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

1V 12Z u 36 = 40Z u 36
36 12
1V = 28Z

so bleibt 1V gleich 28Z, und durch 1Z getheilt, 1Z gleich 28. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 4, die zweite 9, die dritte 28. Denn das Erzeugniß der ersten und zweiten Zahl, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, giebt das Viereck 49; das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, das Viereck 289; das Erzeugniß der dritten und ersten Zahl, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, das Viereck 144.

Drei Viereckzahlen zu finden, deren Bestand gleich ist dem Bestand ihrer Unterschiede. (4 - 15)

Ich setze die kleinste gesuchte Zahl 1, die größte 1V 2Z u 1. Nun aber ist von dreien

Viereckzahlen der Unterschied der kleinsten und größten, zweimal genommen, dem Bestand aller drei Zahlen gleich. Doch der Unterschied von 1, und 1V 2Z u 1, zweimal genommen, ist 2V u 4Z; folglich ist der Bestand aller drei Viereckzahlen 2V u 4Z. Wird nun die kleinste und größte Zahl von diesem Bestand getrennt; so bleibt 1V u 2Z w 2 als die mittelste Zahl. Diese Zahl sei gleich dem Viereck 1V u 16 w 8Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

1V u 16 w 8Z = 1V u 2Z w 2
1   2   16

10Z = 18

so bleibt 10Z gleich 18, und es ist also 1Z gleich $\frac{18}{10}$ oder $\frac{9}{5}$. — Die größte gesuchte Viereckzahl ist demnach $\frac{196}{25}$, die mittelste $\frac{121}{25}$, die kleinste $\frac{25}{25}$. Denn der Unterschied der größten und mittelsten Zahl ist 75, der größten und kleinsten 171, der mittelsten und kleinsten 96. Diese drei Unterschiede machen zusammen 342, und dies ist auch der Bestand der Zahlen selbst.

Drei Zahlen zu finden, daß das Viereck einer jeden, mit der nächstfolgenden Zahl zusammengesetzt, ein Viereck bildet, und der Bestand aller drei Zahlen ebenfalls ein Viereck ist. (4 - 17)

Ich setze die zweite gesuchte Zahl 4Z. Es soll aber das Viereck der ersten Zahl, mit 4Z zusammengesetzt, ein Viereck bilden. Um ein solches Viereck zu finden, nehme ich zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt 4Z geben; solche Zahlen sind 2Z, und 2. Die Hälfte ihres Unterschiedes, nemlich 1Z w 1, setze ich als die erste gesuchte Zahl. Das Viereck davon aber ist 1V u 1 w 2Z, und dies mit 4Z zusammengesetzt, giebt das Viereck 1V 2Z u 1. Nun ist noch übrig die dritte Zahl zu finden, welche von der Beschaffenheit sein muß, daß sie, mit dem Viereck der zweiten Zahl, nemlich mit 16V, zusammengesetzt, ein Viereck bildet. Diese Zahl aber finde ich, wenn ich von irgend einem schicklichen Viereck 16V trenne. Ich nehme hierzu das Viereck 16V 8Z u 1, und es ist also 8Z u 1 die dritte gesuchte Zahl. Diese Zahlen erfüllen aber erst eine Bedingung, denn es soll auch der Bestand von allen dreien ein Viereck sein; doch der Bestand

von allen dreien ist 13Z, und also ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem des Bestandes der Zahlen selbst. Das Viereck von 13Z aber ist 169V; folglich ist 169V gleich 13Z, und 1Z gleich 13V. Die erste gesuchte Zahl ist demnach 13V w 1, die zweite 52V, die dritte 104V u 1. Nun soll endlich auch das Viereck der dritten Zahl, nemlich 10816^{d}V 208V u 1, mit der ersten Zahl (13V w 1) zusammengesetzt, ein Viereck bilden. Doch Viereck und Zahl machen zusammen 10816^{d}V u 221V, und durch 1V getheilt, 10816V u 221. Es ist also 10816V u 221 ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 104Z u 1, nemlich 10816V 208Z u 1. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\cancel{10816}V\ 208Z\ u\ \cancel{1} = 10816V\ u\ 221$$
$$10816 \qquad 1$$
$$208Z = 220$$

so bleibt 208Z gleich 220, und es ist also 1Z gleich $220^{\underline{208}}$ oder $55^{\underline{5}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $36621^{\underline{2704}}$, die zweite $157300^{\underline{2704}}$ die dritte $317304^{\underline{2704}}$. Denn die zweite Zahl, mit dem Viereck der ersten zusammengesetzt, giebt

das Viereck $1766436841^{\underline{7311616}}$; die dritte Zahl, mit dem Viereck der zweiten zusammengesetzt, das Viereck $25600280016^{\underline{7311616}}$; die erste Zahl, mit dem Viereck der dritten zusammengesetzt, das Viereck $100780851600^{\underline{7311616}}$; und der Bestand aller drei Zahlen, das Viereck $511225^{\underline{2704}}$.

Drei unbestimmte Zahlen zu finden, daß die Erzeugnisse von je zweien, durch den Zusatz der Einheit, Vierecke werden. (4 - 20)

Es sei das Erzeugniß der ersten und zweiten gesuchten Zahl 1V u 2Z; denn dieses Erzeugniß wird durch den Zusatz der Einheit zum Viereck. Setze ich nun als erste Zahl 1Z, so ist nothwendig die zweite Zahl 1Z u 2. Jetzt bleibt noch übrig die dritte Zahl zu finden, welche von der Beschaffenheit sein muß, daß, wenn sie mit der ersten oder zweiten Zahl vervielfältigt wird, die Erzeugnisse durch den Zusatz der Einheit Vierecke werden. Nun giebt aber das Vierfache des Erzeugnisses zweier Zahlen, mit dem Viereck ihres Unterschiedes zusammengesetzt, wieder ein Viereck. Nehmen wir daher eine Zahl, welche von den bei-

den ersten Zahlen um 1 verschieden ist, so wird dadurch die dritte Zahl leicht gefunden werden. Eine solche Zahl ist 1Z u 1. Aber 1Z u 1 mit der zweiten Zahl vervielfältigt, giebt 1V 3Z u 2, und dies Erzeugniß viermal genommen, macht 4V 12Z u 8. Der Unterschied beider Zahlen ist 1, und das Viereck davon ebenfalls 1; dieses Viereck mit 4V 12Z u 8 zusammengesetzt, macht 4V 12Z u 9. Folglich ist 4V 12Z u 9 ein Viereck. Trenne ich wieder die Einheit davon, so bleibt 4V 12Z u 8 als das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl. Da nun die zweite Zahl 1Z u 2 ist, so ist die dritte gesuchte Zahl 4Z u 4. — Die gesuchten Zahlen sind demnach 1Z, 1Z u 2, 4Z u 4. Das Erzeugniß der ersten und zweiten Zahl aber ist 1V u 2Z, der ersten und dritten 4V u 4Z, der zweiten und dritten 4V 12Z u 8. Durch den Zusatz der Einheit werden diese drei Erzeugnisse Vierecke, deren Seiten 1Z u 1, 2Z u 1, 2Z u 3 sind. Es findet folglich keine Gleichung Statt, und 1Z kann daher jeder beliebigen Zahl gleich gesetzt werden. Wird 1Z gleich 1 angenommen, so sind die drei Erzeugnisse 3, 8, 24; wird 1Z

gleich 2 angenommen, 8, 24, 48, und so ins Unendliche weiter.

Drei gleichverhältige Zahlen zu finden, daß der Unterschied von je zweien ein Viereck ist. (2 - 24)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z; die zweite aber, da der Unterschied ein Viereck sein soll, 1Z u 9. Es soll jedoch auch der Unterschied der zweiten und dritten, und dritten und ersten Zahl ein Viereck sein; folglich muß, als drittes Glied, 1Z mit einer Zahl verbunden werden, die nicht nur aus zwei Vierecken besteht, sondern auch selbst ein Viereck ist. Eine solche Zahl ist 25. Die dritte gesuchte Zahl ist demnach 1Z u 25. Da aber die drei gefundenen Zahlen gleichverhältig sind, so muß das Erzeugniß der beiden äußersten, dem Viereck der mittelsten gleich sein; doch das Erzeugniß der beiden äußersten ist 1V u 25Z, und das Viereck der mittelsten 1V 18Z u 81. Folglich ist 1V 18Z u 81 gleich 1V u 25Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

1V u 25Z = 1V 18Z u 81
18 1

7Z = 81

so bleibt 7Z gleich 81, und es ist also 1Z gleich $\frac{81}{7}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $\frac{81}{7}$, die zweite $\frac{144}{7}$, die dritte $\frac{256}{7}$. Denn 81 zu 144 ist gleich 144 zu 156, und der Unterschied der ersten und zweiten Zahl ist das Viereck 9, der zweiten und dritten das Viereck 16, der dritten und ersten das Viereck 25.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn jede derselben von dem Erzeugniß aller drei Zahlen getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind. (4 - 24)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z; das Erzeugniß aller drei Zahlen aber, da der Uiberschuß, wenn 1Z davon getrennt wird, ein Viereck sein soll, 1V u 1Z. Das Erzeugniß der zweiten und dritten Zahl allein ist demnach 1Z u 1; denn 1Z u 1 mit der ersten Zahl vervielfältigt, giebt 1V u 1Z. Setze ich daher die zweite gesuchte Zahl 1, so ist die dritte 1Z u 1. Nun soll auch

die zweite und dritte Zahl von 1V u 1Z getrennt werden, und die Uiberschüsse Vierecke sein; trenne ich aber davon 1, so bleibt 1V u 1Z w 1 als Viereck, trenne ich davon 1Z u 1, so bleibt 1V w 1 ebenfalls als Viereck. Hier besteht also eine doppelte Gleichung. Der Unterschied von 1V u 1Z w 1, und 1V w 1 ist aber 1Z, und zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, diesen Unterschied geben, sind 2Z, und 1^{2}. Die Hälfte des Bestandes von 2Z, und 1^{2} ist 1Z u 1^{4}, und das Viereck davon 1V 1^{2}Z u 1^{16}. Folglich ist 1V 1^{2}Z u 1^{16} gleich 1V u 1Z w 1, und in ganzen Zahlen, 16V 16Z w 16 gleich 16V 8Z u 1. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

16V 16Z w 16 = 16V 8Z u 1
8 16 16

8Z = 17

so bleibt 8Z gleich 17, und es ist also 1Z gleich 17^{8}. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 17^{8}, die zweite 8^{8}, die dritte 25^{8}, und das Erzeugniß aller drei Zahlen 425^{64}. Werden nun die drei

Zahlen von 425^{64} getrennt, so bleiben die Vierecke 289^{64}, 361^{64}, 225^{64}.

Vier Viereckzahlen zu finden, deren Bestand, mit dem Bestande ihrer Seiten zusammengesetzt, einer gegebenen Zahl gleich ist. — Es sei 12 die gegebene Zahl. (4 - 31)

Jedes Viereck, mit seiner Seite und der Theilzahl 1^{4} zusammengesetzt, giebt ein neues Viereck; wird aber von der Seite dieses neuen Vierecks die Theilzahl 1^{2} getrennt, so erhält man wieder die Seite des ersten Vierecks. Nun soll der Bestand der vier gesuchten Vierecke und ihrer Seiten gleich 12 sein; wird daher 4^{4} zu 12 gesetzt, so giebt dies den Bestand von vier neuen Vierecken. Aber 4^{4} ist gleich 1, folglich 13 der Bestand der neuen Vierecke. Wenn wir nun einen Gleichwerth von 13 nehmen, welcher sich in vier Vierecke zerlegen läßt, und dann von der Seite jedes dieser Vierecke die Theilzahl 1^{2} trennen, so werden die Uiberschüsse die Seiten der gesuchten Vierecke sein. Ein Gleichwerth aber von 13, der sich in vier Vierecke zerlegen läßt, ist 325^{25}.

Die Vierecke desselben sind $64^{\underline{25}}$, $36^{\underline{25}}$, $144^{\underline{25}}$, $81^{\underline{25}}$, und die Seiten davon $8^{\underline{5}}$, $6^{\underline{5}}$, $12^{\underline{5}}$, $9^{\underline{5}}$. Trenne ich nun von jeder dieser Seite 1^{2}, so erhalte ich die Seiten der gesuchten Vierecke $11^{\underline{10}}$, $7^{\underline{10}}$, $19^{\underline{10}}$, $13^{\underline{10}}$. — Die gesuchten Vierecke sind demnach $121^{\underline{100}}$, $49^{\underline{100}}$, $361^{\underline{100}}$, $169^{\underline{100}}$. Denn diese Vierecke, mit ihren Seiten zusammmengesetzt, geben $120^{\underline{10}}$ gleich 12.

Ein Ganzes zu finden, welches in zwei solche Theile zerlegt werden kann, daß, wenn jedem Theil eine gegebene Zahl zugesetzt wird, das Erzeugniß ihrer Vervielfältigung ein Viereck ist. — Es mögen 3 und 5 die gegebenen Zahlen sein. (4 - 33)

Der Bestand der gegebenen Zahlen ist 8, und der Gleichwerth des gesuchten Ganzen die Einheit; also zusammen 9. Nun ist aber das Erzeugniß zweier Vierecke ebenfalls ein Viereck; folglich darf man nur, um die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen, einen Gleichwerth von 9 nehmen, der sich in zwei Vierecke zerlegen läßt. Ein solcher Gleich-

werth von 9 ist $225^{\underline{25}}$, und die beiden Vierecke desselben sind $81^{\underline{25}}$ und $144^{\underline{25}}$. Die gegebene Zahl 3 ist demnach gleich $75^{\underline{25}}$, die gegebene Zahl 5 gleich $125^{\underline{25}}$. Trenne ich nun $75^{\underline{25}}$ von $81^{\underline{25}}$, so bleibt $6^{\underline{25}}$ als der kleinere Theil des Ganzen; trenne ich $125^{\underline{25}}$ von $144^{\underline{25}}$, so bleibt $19^{\underline{25}}$ als der größere Theil des Ganzen. — Das gesuchte Ganze ist demnach $25^{\underline{25}}$; das Erzeugniß aber von $3 \cdot 6^{\underline{25}}$ und $5 \cdot 19^{\underline{25}}$ ist das Viereck $18 \cdot 414^{\underline{625}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß der Unterschied der größten und mittelsten, zum Unterschied der mittelsten und kleinsten, ein gegebenes Verhältniß hat, und zwei und zwei Zahlen, zusammengesetzt, Vierecke bilden. — Es sei das Verhältniß beider Unterschiede dreifach. (4 - 45)

Ich setze die mittelste gesuchte Zahl 1Z u 2, und den Bestand der mittelsten und kleinsten Zahl, da er ein Viereck sein soll, 4. Die kleinste gesuchte Zahl ist also 2 w 1Z. Nun soll aber der Unterschied der größten und mittelsten Zahl das Dreifache des Unterschieds der mittelsten und kleinsten sein; doch der Unterschied der mittelsten und

kleinsten Zahl ist 2Z. Folglich ist der Unterschied der größten und mittelsten Zahl 6Z, und da die mittelste Zahl 1Z u 2 ist, so muß nothwendig die größte gesuchte Zahl 7Z u 2 sein. Allein es sollen auch zwei und zwei Zahlen, zusammengesetzt Vierecke bilden. Es sei daher das kleinste Viereck 4; das mittelste 1V 4Z u 4. Aber das Verhältniß der beiden Unterschiede dreier Zahlen ist gleich dem Verhältniß, welches der Unterschied des Bestandes der größten und mittelsten und größten und kleinsten Zahl, zum Unterschied des Bestandes der größten und kleinsten und mittelsten und kleinsten Zahl hat. Der Unterschied aber des mittelsten und kleinsten Vierecks ist 1V u 4Z, und da das Verhältniß der beiden Unterschiede der gesuchten Zahlen dreifach ist, so muß der Unterschied des größten und mittelsten Vierecks der dritte Theil von 1V u 4Z sein. Der dritte Theil von 1V u 4Z ist aber $1^{\underline{3}}$V u $4^{\underline{3}}$Z, und dieser Unterschied, mit dem mittelsten Viereck, nemlich mit 1V 4Z u 4, zusammengesetzt, giebt das größte gesuchte Viereck $4^{\underline{3}}$V $16^{\underline{3}}$Z u 4, oder in ganzen Zahlen, 12V 48Z u 36, und durch 4 getheilt, 3V 12Z u 9. Jetzt nehme ich irgend ein schick-

liches Viereck, etwa das der Seite 5Z w 3; nemlich 25V u 9 w 30Z, und betrachte es als gleich mit 3V 12Z u 9. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcl} 25V \text{ u } 9 \text{ w } 30Z & = & 3V\ 12Z \text{ u } 9 \\ 3 & & 30 \quad 9 \\ \hline 22V & = & 42Z \end{array}$$

so bleibt 22V gleich 42Z, und durch 1Z getheilt, 22Z gleich 42, also 1Z gleich 42^{22} oder 12^{11}. — Das mittelste Viereck ist demnach 1849^{121}, der mittelste Bestand aber, d. h. der Bestand der größten und kleinsten Zahl, ist 6Z u 4. Folglich ist 6Z u 4 gleich 1849^{121}, oder in ganzen Zahlen, 726Z u 484 gleich 1849. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcl} 726Z \text{ u } 484 & = & 1849 \\ & & 484 \\ \hline 726Z & = & 1365 \end{array}$$

so bleibt 726Z gleich 1365, und es ist also 1Z gleich 1365^{726}. — Die größte gesuchte Zahl ist demnach 11007^{726}, die mittelste 2817^{726}, die

kleinste $87^{\underline{126}}$. Denn der Unterschied der größten und mittelsten Zahl ist 8190, der mittelsten und kleinsten 2730; aber 8190 zu 2730 ist dreifach. Ferner, der Bestand der größten und mittelsten Zahl ist das Viereck $2304^{\underline{121}}$; der Bestand der größten und kleinsten, das Viereck $1849^{\underline{121}}$; der Bestand der mittelsten und kleinsten, das Viereck 4.

Drei Zahlen zu finden, daß der Unterschied der Vierecke der größten und kleinsten Zahl, zu dem Unterschied der mittelsten und kleinsten Zahl selbst, ein gegebenes Verhältniß hat, und daß zwei und zwei Zahlen, zusammengesetzt, Vierecke bilden. — Es sei das Verhältniß der Unterschiede dreifach. (4 - 46)

Ich setze den Bestand der größten und mittelsten Zahl, da er ein Viereck sein soll, 16V. Die größte gesuchte Zahl muß also größer als 8V sein; sie sei daher 8V u 2. Die mittelste gesuchte Zahl ist also 8V w 2. Ferner, der mittelste Bestand, d. h. der Bestand der größten und kleinsten Zahl, muß kleiner als 16V und größer als 8V

sein; er sei daher 9V. Da aber die mittelste Zahl 8V w 2 ist, so muß nothwendig die kleinste gesuchte Zahl 1V w 2 sein. Nun soll der Unterschied der Vierecke der größten und kleinsten Zahl, zum Unterschied der mittelsten und kleinsten Zahl, dreifach sein; doch der Unterschied beider Vierecke ist 64V, der Unterschied beider Zahlen 7V. Allein 64 zu 7 ist nicht dreifach, denn das Dreifache von 7 ist 21. Es ist aber 64 entstanden, indem das doppelte Erzeugniß von 2 mal 8, nemlich 32, zweimal genommen wurde. Hieraus geht hervor, daß wir statt 2 eine Zahl nöthig haben, welche mit 32 vervielfältigt, 21 giebt; diese Zahl ist $\frac{21}{32}$. Ich setze daher jetzt die größte gesuchte Zahl 8V u $\frac{21}{32}$, die mittelste 8V w $\frac{21}{32}$, die kleinste 1V w $\frac{21}{32}$. Nun ist noch übrig, daß auch der Bestand der mittelsten und kleinsten Zahl ein Viereck giebt. Dieser Bestand aber ist 9V w $\frac{21}{16}$, und also irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck der Seite 3Z w 6, nemlich 9V u 36 w 36Z. Folglich ist 9V u 36 w 36Z gleich 9V w $\frac{21}{16}$, und in ganzen Zahlen, 144V u 576 w 576Z gleich 144V w 21. Setze

ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

144V u 576 w 576Z = 144V w 21
144 ... 576

576Z = 597

so bleibt 576Z gleich 597, und es ist also 1Z gleich $597^{\underline{576}}$. — Die größte gesuchte Zahl ist demnach $3069000^{\underline{331776}}$, die mittelste $2633544^{\underline{331776}}$, die kleinste $138681^{\underline{331776}}$. Denn der Unterschied der Vierecke der größten und kleinsten Zahl ist $2483207000064^{\underline{110075314176}}$, od. $7484589^{\underline{331776}}$, der Unterschied der mittelsten und kleinsten Zahl $2494863^{\underline{331776}}$; aber 7484589 zu 2494863 ist dreifach. Ferner, der Bestand der größten und mittelsten Zahl ist das Viereck $5702544^{\underline{331776}}$; der Bestand der größten und kleinsten, das Viereck $3207681^{\underline{331776}}$; der Bestand der mittelsten und kleinsten, das Viereck $2772225^{\underline{331776}}$.

Drei gleichverhältige Zahlen zu finden, daß jede, durch den Zusatz einer gegebenen Zahl, zum

Viereck wird. — Es sei 20 die gegebene Zahl.

(5 - 2)

Zuvörderst muß ein Viereck gefunden werden, welches durch den Zusatz von 20 wieder ein Viereck wird. Ein solches Viereck ist 16. Ich setze daher die eine der äußern Zahlen 16, die andere 1V; die mittelste Zahl ist folglich 4Z. Jede dieser Zahlen soll nun durch den Zusatz von 20 ein Viereck werden. Demnach sind 4Z u 20, und 1V u 20 Vierecke; also eine doppelte Gleichung anwendbar. Der Unterschied aber von 4Z u 20, und 1V u 20 ist 1V w 4Z, und zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, diesen Unterschied geben, sind 1Z, und 1Z w 4. Die Hälfte des Unterschieds dieser Zahlen ist 2, und das Viereck davon 4. Demnach wäre 4Z u 20 gleich 4; doch das ist ungereimt. Es ist aber 4 der vierte Theil des gewählten Vierecks 16. Hieraus geht hervor, daß wir statt 16 ein Viereck nöthig haben, welches größer als das Vierfache von 20, d. h. größer als 80 ist. Wir dürfen also 1Z u 9 als Seite des gesuchten Vierecks annehmen. Das Viereck aber von 1Z u 9 ist 1V 18Z u 81, und mit 20 zusammengesetzt, 1V 18Z u 101,

und ebenfalls ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 1V w 11, nemlich 1Z u 121 w 22Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\cancel{1}V\ 18Z \text{ u } \cancel{101} = 1V \text{ u } 121 \text{ w } \cancel{22}Z$$
$$22 \qquad\qquad 1 \quad 101$$
$$40Z = 20$$

so bleibt 40Z gleich 20, und es ist also 1Z gleich $20^{\underline{40}}$ oder $1^{\underline{2}}$. — Demnach ist 1Z u 9 gleich $9\cdot1^{\underline{2}}$, und das Viereck davon $90\cdot1^{\underline{4}}$. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze die eine äußere Zahl, wie zuvor, 1V, die andere aber $90\cdot1^{\underline{4}}$; die mittelste Zahl ist folglich $9\cdot1^{\underline{2}}$Z. Es sind also $9\cdot1^{\underline{2}}$Z u 20, und 1V u 20 Vierecke. Der Unterschied von $9\cdot1^{\underline{2}}$Z u 20, und 1V u 20 ist aber 1V w $9\cdot1^{\underline{2}}$Z, und zwei Zahlen, welche, mit einander vervielfältigt, diesen Unterschied geben, sind 1Z, und 1Z w $9\cdot1^{\underline{2}}$. Die Hälfte des Unterschiedes dieser Zahlen ist $19^{\underline{4}}$ und das Viereck davon $361^{\underline{16}}$. Folglich ist $361^{\underline{16}}$ gleich $9\cdot1^{\underline{2}}$Z u 20, oder in ganzen Zahlen, 152Z u 320 gleich 361. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

152Z

$$152Z \text{ u } 320 = 361$$
$$320$$
$$152Z = 41$$

so bleibt 152Z gleich 41, und es ist also 1Z gleich $41^{\underline{152}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $90 \cdot 1^{\underline{4}}$, die zweite $779^{\underline{304}}$, die dritte $1681^{\underline{23104}}$. Denn die erste Zahl, mit 20 zusammengesetzt, giebt das Viereck $110 \cdot 1^{\underline{4}}$; die zweite mit 20 zusammengesetzt, das Viereck $361^{\underline{16}}$; die dritte mit 20 zusammengesetzt, das Viereck $463761^{\underline{23104}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn eine gegebene Zahl von jeder derselben, wie auch von dem Erzeugniß von je zweien, getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind. — Es sei 6 die gegebene Zahl. (5 - 4)

Wenn man zweien nächsten Vierecken dieselbe gegebene Zahl zusetzt, und eine dritte Zahl annimmt, welche das Doppelte weniger 1 der andern beiden ist, so erhält man drei Zahlen von der Beschaffenheit, daß, wenn die gegebene Zahl von dem Erzeugniß von je zweien getrennt wird, die

Uiberschüsse Vierecke sind. Diesem zufolge nehme ich zwei nächste Vierecke nach den Seiten 1Z, und 1Z u 1, nemlich 1V, und 1V 2Z u 1, und verbinde damit die gegebene Zahl 6. Die erste gesuchte Zahl ist demnach 1V u 6, die zweite 1V 2Z u 7; die dritte, da sie das Doppelte weniger 1 der andern beiden sein soll, 4V 4Z u 25. Nun soll aber auch, wenn von 4V 4Z u 25 die gegebene Zahl 6 getrennt wird, der Uiberschuß ein Viereck sein. Folglich ist 4V 4Z u 19 ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 2Z w 6, nemlich 4V u 36 w 24Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{ccc} 4V\ 4Z\ u\ 19 & = & 4V\ u\ 36\ w\ 24Z \\ 24 & 4 & 19 \\ \hline 28Z & = & 17 \end{array}$$

so bleibt 28Z gleich 17, und es ist also 1Z gleich $17^{\underline{28}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $4993^{\underline{784}}$, die zweite $6729^{\underline{784}}$, die dritte $22660^{\underline{784}}$. Denn nimmt man von jeder dieser Zahlen 6, so

bleiben die Vierecke $289^{\underline{784}}$, $2025^{\underline{784}}$, $17956^{\underline{784}}$; nimmt man aber 6 von dem Erzeugniß von je zweien, so bleiben die Vierecke $29865014^{\underline{614656}}$, $109453444^{\underline{614656}}$, $138587264^{\underline{614656}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn der Bestand von allen dreien dem Viereck einer jeden Zahl zugesetzt oder davon getrennt wird, Vierecke entstehen. (5 - 9)

In jedem rechtwinklichten Dreieck giebt das Vierfache des Inhalts, mit dem Viereck der Hypotenuse zusammengesetzt oder davon getrennt, ein Viereck. Die gesuchten Zahlen müssen also Hypotenusen rechtwinklichter Dreiecke, und der Bestand aller drei Zahlen das Vierfache des Inhalts jedes Dreiecks sein. Zur Lösung dieser Aufgabe sind demnach drei rechtwinklichte Dreiecke von gleichem Inhalt erforderlich. Man erhält sie vermöge zweier Zahlen, deren Erzeugniß, mit dem Bestand ihrer Vierecke zusammengesetzt, ein Viereck ist. Diese Zahlen aber findet man so: Es sei die erste Zahl 1Z, die andere eine bekannte Größe; etwa 1. Das Erzeugniß beider Zahlen ist dem-

nach 1Z, ihre Vierecke 1V, und 1; Vierecke und Erzeugniß folglich zusammen 1V1Z u 1, und irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck 1V u 4 w 4Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{ccc} 1V\,1Z \text{ u } 1 & = & 1V \text{ u } 4 \text{ w } 4Z \\ 4 & & 1 \quad 1 \\ \hline 5Z & = & 3 \end{array}$$

so bleibt 5Z gleich 3, und es ist also 1Z gleich $3^{\underline{5}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $3^{\underline{5}}$, die andere $5^{\underline{5}}$, und ohne Nenner, 3 und 5. Denn das Erzeugniß beider Zahlen ist 15, der Bestand ihrer Vierecke 34; aber 15 und 34 macht 49. Die Seite von 49 ist 7, und der Bestand von 3 und 5 ist 8. Ich bilde daher die gesuchten Dreiecke aus folgenden Zahlen: das erste aus 7 und 3, das zweite aus 7 und 5, das dritte aus 7 und 8. Das erste Dreieck ist demnach 40, 42, 58, das zweite 24, 70, 74, das dritte 15, 112, 113, und in unbestimmten Zahlen

40Z , 42Z , 58Z

24Z , 70Z , 74Z

15Z , 112Z , 113Z

Der Inhalt jedes dieser Dreiecke ist 840V, und die Hypotenusen derselben, nemlich 58Z, 74Z, 113Z, sind die gesuchten Zahlen. Nun soll aber das Vierfache des Inhalts jedes Dreiecks dem Bestande aller drei gesuchten Zahlen gleich sein; doch der Bestand der gesuchten Zahlen ist 245Z, und das Vierfache des Inhalts jedes Dreiecks 3360V. Folglich ist 3360V gleich 245Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 3360Z gleich 245, und es ist also 1Z gleich $245^{\underline{3360}}$ oder $7^{\underline{96}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $406^{\underline{96}}$, die zweite $518^{\underline{96}}$, die dritte $791^{\underline{96}}$, und der Bestand aller drei Zahlen $1715^{\underline{96}}$. Aber $1715^{\underline{96}}$, mit den Vierecken der drei Zahlen zusammengesetzt, giebt die Vierecke $329476^{\underline{9216}}$, $432964^{\underline{9216}}$, $790321^{\underline{9216}}$; von ihnen getrennt, die Vierecke $196^{\underline{9216}}$, $103684^{\underline{9216}}$, $461041^{\underline{9216}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn dem Erzeugniß von je zweien der Bestand aller drei Zahlen zugesetzt oder davon getrennt wird, Vierecke entstehen. (5 - 11)

Die Erzeugnisse von je zweien der gesuchten Zahlen müssen Vierecke der Hypotenusen rechtwinklichter Dreiecke von gleichem Inhalt, und der Bestand aller drei Zahlen das Vierfache des Inhalts jedes Dreiecks sein. Wir können uns daher der Dreiecke aus voriger Aufgabe

40 , 42 , 58

24 , 70 , 74

15 , 112 , 113

bedienen. Die Vierecke der Hypotenusen sind demnach 3364, 5476, 12769. Um aber drei Zahlen zu finden, daß die Erzeugnisse von je zweien gegebene Vierecke sind, vervielfältigt man zuförderst die Seiten der ersten beiden Vierecke mit einander, und theilt das Erzeugniß durch die Seite des dritten Vierecks, wo sodann der Enthalt die erste gesuchte Zahl ist. Die andern beiden Zahlen findet man, wenn man mit diesem Enthalt

wieder das erste und zweite Viereck theilt. Da nun 3364, 5476, 12769 die gegebenen Vierecke sind, so sind die verlangten Zahlen folglich $\frac{4292}{113}$, $\frac{95033}{1073}$, $\frac{154697}{1073}$, und mit gleichem Nenner $\frac{4605316}{121249}$ $\frac{10738729}{121249}$ $\frac{17480761}{121249}$. Die erste gesuchte Zahl ist demnach 4605316Z, die zweite 10738729Z, die dritte 17480761Z. Es soll aber das Vierfache des Inhalts jedes Dreiecks dem Bestande aller drei gesuchten Zahlen gleich sein; doch der Bestand der gesuchten Zahlen ist 32824806Z, und das Vierfache des Inhalts jedes Dreiecks 3360V. Folglich ist 3360V gleich 32824806Z, und durch 1Z getheilt, 3360Z gleich 32824806, also 1Z gleich $\frac{32824806}{3360}$ oder $\frac{781543}{80}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $\frac{3599252482588}{80}$ die zweite $\frac{8392778478847}{80}$, die dritte $\frac{13661966394223}{80}$.

Vier Zahlen zu finden, daß, wenn jede derselben dem Viereck des Bestandes aller vier Zahlen zugesetzt oder davon getrennt wird, Vierecke entstehen. (3 - 22)

Die Lösung dieser Aufgabe gründet sich wiederum auf den Satz: daß das Vierfache des Inhalts eines rechtwinklichten Dreiecks, mit dem Viereck der Hypotenuse zusammengesetzt oder davon getrennt, ein Viereck giebt. Es müssen demnach zuförderst vier rechtwinklichte Dreiecke mit gleicher Hypotenuse gefunden werden; dies geschieht so: Ich nehme als Hypotenuse irgend eine Zahl, welche sich zweimal in zwei Vierecke zerlegen läßt, etwa 65; denn 65 kann in 49 und 16, und in 64 und 1 zerlegt werden. Aus den Seiten dieser Vierecke bilde ich die ersten beiden Dreiecke. Die Seiten von 49 und 16 sind 7 und 4, und das aus 7 und 4 gebildete Dreieck ist 33, 56, 65; die Seiten von 64 und 1 sind 8 und 1, und das aus 8 und 1 gebildete Dreieck ist 16, 36, 65. Nun ist aber 65 das Erzeugniß von 5 mal 13, und jede dieser Zahlen ebenfalls in zwei Vierecke zu zerlegen; nemlich 5 in 4 und 1, 13 in 9 und 4. Die Seiten von 4 und 1 sind 2 und 1, und das aus 2 und 1 gebildete Dreieck ist 3, 4, 5; die Seiten von 9 und 4 sind 3 und 2, und das aus 3 und 2 gebildete Dreieck ist 5, 12, 13. Um aber diese

Dreiecke den andern beiden gleich zu machen, vervielfältige ich das erste mit der Hypotenuse des zweiten, und das zweite mit der Hypotenuse des ersten, wodurch ich die Dreiecke 39, 52, 65, und 25, 60, 65 erhalte. Die vier gefundenen Dreiecke mit gleicher Hypotenuse, in unbestimmten Größen, sind demnach

39Z, 52Z, 65Z

25Z, 60Z, 65Z

33Z, 56Z, 65Z

16Z, 63Z, 65Z

und die Inhalte dieser Dreiecke, viermal genommen, die gesuchten Zahlen. Ich setze daher die erste gesuchte Zahl 4056V, die zweite 3000V, die dritte 3696V, die vierte 2016V; den Bestand aller vier Zahlen aber setze ich 65Z. Doch der Bestand aller vier Zahlen ist 12768V; folglich ist 12768V gleich 65Z, und durch 1Z getheilt, 12768Z gleich 65, also 1Z gleich $65^{\underline{12768}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $17136600^{\underline{163021824}}$, die zweite $12675000^{\underline{163021824}}$, die dritte

$15615600^{\underline{163021824}}$, die vierte $8517600^{\underline{163021824}}$, und das Viereck des Bestandes aller vier Zahlen $17850625^{\underline{163021824}}$. Werden nun die vier Zahlen mit $17850625^{\underline{163021824}}$ zusammengesetzt, so entstehen die Vierecke $34987225^{\underline{163021824}}$, $30525625^{\underline{163021824}}$. $33466225^{\underline{163021824}}$, $26368225^{\underline{163021824}}$; werden hingegen die vier Zahlen von $17850625^{\underline{163021824}}$ getrennt, so entstehen die Vierecke $714025^{\underline{163021824}}$, $3175625^{\underline{163021824}}$, $2235025^{\underline{163021824}}$, $9333025^{\underline{163021824}}$.

9.

Aufgaben und deren Lösung.

Dritte Abtheilung.

Eine gegebene Zahl in zwei Würfel zu zerlegen, daß der Bestand ihrer Seiten eine benannte Zahl ist. — Es sei 370 die gegebene Zahl, und der Bestand der Seiten 10. (4 - 1)

Ich setze die Seite des ersten gesuchten Würfels 1Z u 5, die Seite des zweiten Würfels aber, da der Bestand beider Seiten 10 sein soll, 5 w 1Z.

Der erste Würfel ist also 1W 15V 75Z u 125, der zweite 125 u 15V w 75Z w 1W. Beide Würfel zusammen aber sollen 370 sein; doch beide zusammen sind 30V u 250. Folglich ist 30V u 250 gleich 370. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{rcr} 30V \text{ u } 250 & = & 370 \\ & & 250 \\ \hline 30V & = & 120 \end{array}$$

so bleibt 30V gleich 120, und es ist also 1V gleich 4, und 1Z gleich 2. — Der erste gesuchte Würfel ist demnach 343, der zweite 27. Denn die Seite von 343 ist 7, die Seite von 72 ist 3; aber 7 und 3 macht 10.

Zwei Zahlen zu finden, deren Unterschied, wie auch der Unterschied ihrer Würfel, gegeben ist. — Der Unterschied der Zahlen sei 6, und der Unterschied ihrer Würfel 504. (4 - 2)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z u 3, die andere aber, da der Unterschied beider Zahlen 6

sein soll, 1Z w 3. Der Würfel der ersten Zahl ist also 1W 9V 27Z u 27, der zweiten 1W u 27Z w 9V w 27. Es soll aber der Unterschied beider Würfel 504 sein; doch der Unterschied beider ist 18V u 54. Folglich ist 18V u 54 gleich 504. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

18V u 54	=	504
		54
18V	=	450

so bleibt 18V gleich 450, und es ist also 1V gleich 25, und 1Z gleich 5. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 8, die zweite 2. Denn der Würfel von 8 ist 512, der Würfel von 2 ist 8; aber der Unterschied von 8 und 2 ist 6, der Unterschied von 512 und 8 ist 504.

Einem Würfel und einem Viereck dasselbe Viereck zuzusetzen, daß der Bestand des Würfels und des zugesetzten Vierecks ein Würfel, und der Bestand beider Vierecke, ein Viereck ist. (4 - 6)

Ich setze den gesuchten Würfel 1W, das Viereck 9V, und das zuzusetzende Viereck, da es mit 9V ein Viereck bilden soll, 16V. Es soll aber auch 16V, mit dem Würfel zusammengesetzt, einen Würfel geben; folglich ist 1W u 16V irgend einem Würfel gleich. Es sei dies mit dem Würfel 8W. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcl} 8W & = & 1W \text{ u } 16V \\ 1 & & \\ \hline 7W & = & 16V \end{array}$$

so bleibt 7W gleich 16V, und durch 1V getheilt, 7Z gleich 16, also 1Z gleich $16^{\underline{7}}$. — Der gesuchte Würfel ist demnach $4096^{\underline{343}}$, das Viereck $2304^{\underline{49}}$, und das zuzusetzende Viereck $4096^{\underline{49}}$. Denn der Würfel mit $4096^{\underline{49}}$ zusammengesetzt, giebt den Würfel $32768^{\underline{343}}$; das Viereck mit $4096^{\underline{49}}$ zusammengesetzt, das Viereck $6400^{\underline{49}}$.

Einem Würfel und einem Viereck dasselbe Viereck zuzusetzen, daß der Bestand des Würfels und des zugesetzten Vierecks ein Viereck, und der Bestand beider Vierecke, ein Würfel ist. (4 - 7)

Ich setze das zuzusetzende Viereck 4V, und den Bestand dieses Vierecks und des Würfels, da er ein Viereck sein soll, 9V. Der gesuchte Würfel ist demnach 5V. Es soll aber auch der Bestand beider Vierecke ein Würfel sein. Dieser Würfel sei, wie der vorige, 5V. Das gesuchte Viereck ist demnach 1V. Nun haben wir aber 5V als Würfel gesetzt, und es muß also 5V irgend einem Würfel gleich sein. Es sei dies mit dem Würfel 1W. Folglich ist 1W gleich 5V, und durch 1V getheilt, 1Z gleich 5. — Der gesuchte Würfel ist demnach 125, das Viereck 25, und das zuzusetzende Viereck 100. Denn der Würfel mit 100 zusammengesetzt, giebt das Viereck 225, das Viereck mit 100 zusammengesetzt den Würfel 125.

Einem Würfel und dessen Seite dieselbe Zahl zuzusetzen, daß der Bestand der Seite und der Zahl ein Würfel, und der Bestand des Würfels und der Zahl, die Seite dieses Würfels ist.

Ich setze den Würfel 8W; die Zahl aber, da sie mit 2Z, als der Seite von 8W, einen Würfel bilden soll, 27W w 2Z. Der Bestand der Seite und der Zahl ist also 27W. Nun soll aber die Zahl und der erste Würfel, zusammengesetzt, die Seite von 27W sein; doch der Bestand des Würfels und der Zahl ist 35W w 2Z, und die Seite von 27W ist 3Z. Folglich ist 35W w 2Z gleich 3Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen,

$$
\begin{array}{lcr}
35W \;\text{w}\; 2Z & = & 3Z \\
 & & 2 \\
\hline
35W & = & 5Z
\end{array}
$$

so bleibt 35W gleich 5Z, und durch 1Z getheilt, 35V gleich 5, also 1V gleich $5^{\underline{35}}$. Allein $5^{\underline{35}}$ ist kein Viereck; folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 35 der Bestand der beiden Würfel 8 und 27, und 5 ist der Bestand ihrer Seiten. Da nun bei einem Theilviereck sowohl der Zähler als der Nenner Viereckzahlen sein müssen, so geht hieraus hervor, daß wir, statt 8 und 27, zwei Würfel nöthig haben, deren eigener Bestand sowohl, als auch der Bestand ihrer Seiten,

Viereckzahlen sind, und daß sich beide Bestände zu einander verhalten müssen, wie irgend ein Viereck zu seiner Seite. Diese Würfel finden wir so: Es sei 2 der Bestand beider Seiten. Ich setze daher die Seite des einen Würfels 1Z, des andern 2 w 1Z; die Würfel selbst sind also 1W, und 6V u 8 w 12Z w 1W. Der Bestand beider Würfel ist demnach 6V u 8 w 12Z, und ein Viereck. Es soll aber dieser Bestand nicht nur selbst, sondern auch der Bestand der Seiten, ein Viereck sein, und beide Bestände sich zu einander verhalten, wie irgend ein Viereck zu seiner Seite. Der Bestand der Seiten aber ist 2, und das Viereck davon 4; die Seite ist also die Hälfte des Vierecks. Es muß demnach auch die Hälfte von 6V u 8 w 12Z, nemlich 3V u 4 w 6Z, ein Viereck sein. Dies Viereck sei gleich dem der der Seite 4Z w 2, nemlich 16V u 4 w 16Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

16V u 4 w 16Z = 3V u 4 w 6Z
3   4 16

13V = 10Z

so

so bleibt 13V gleich 10Z, und durch 1Z getheilt, 13Z gleich 10, also 1Z gleich $10^{\underline{13}}$. — Die Seiten der gesuchten Würfel sind demnach $10^{\underline{13}}$ und $16^{\underline{13}}$, und ohne Nenner 10 und 16, oder noch kürzer 5 und 8; die Würfel selbst aber sind 125 und 512. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze den ersten Würfel 125W, die zuzusetzende Zahl aber 512W w 5Z. Der Bestand der Seite und der Zahl ist also 512W. Nun soll aber die Zahl und der Würfel, zusammengesetzt, die Seite von 512W sein; doch der Bestand des Würfels und der Zahl ist 637W w 5Z, und die Seite von 512W ist 8Z. Folglich ist 637W w 5Z gleich 8Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen,

$$\begin{array}{rcl} 637W \text{ w } 5Z & = & 8Z \\ & & 5 \\ \hline 637W & = & 13Z \end{array}$$

so bleibt 637W gleich 13Z, und durch 1Z getheilt, 637V gleich 13, also 1V gleich $13^{\underline{637}}$ oder $1^{\underline{49}}$, und 1Z gleich $1^{\underline{7}}$. — Der gesuchte Würfel ist demnach $125^{\underline{343}}$, die zuzusetzende Zahl $267^{\underline{343}}$.

Denn $267^{\underline{343}}$ mit der Seite des Würfels ($5^{\underline{7}}$) zusammengesetzt, giebt den Würfel $512^{\underline{343}}$; ferner, $267^{\underline{343}}$ mit dem Würfel zusammengesetzt, giebt $8^{\underline{7}}$, und dies ist die Seite des Würfels $512^{\underline{343}}$.

Zwei Würfel zu finden, deren Bestand gleich ist dem Bestande ihrer Seiten. (4 - 11)

Ich setze die Seiten der beiden gesuchten Würfel, aus denselben Gründen wie in voriger Aufgabe, 5Z und 8Z; die Würfel selbst sind also 125W und 512W. Nun soll aber der Bestand der Würfel dem Bestande der Seiten gleich sein; doch der Bestand der Würfel ist 637W, und der Bestand der Seiten 13Z. Folglich ist 637W gleich 13Z, und durch 1Z getheilt, 637V gleich 13, also 1V gleich $1^{\underline{49}}$, und 1Z gleich $1^{\underline{7}}$. — Die gesuchten Würfel sind demnach $125^{\underline{343}}$ und $512^{\underline{343}}$, die Seiten derselben aber $5^{\underline{7}}$ und $8^{\underline{7}}$; denn der Bestand der Würfel ist $13^{\underline{7}}$, und der Bestand der Seiten ebenfalls.

Einem Würfel und dessen Seite dieselbe Zahl zuzusetzen, daß der Bestand des Würfels und der

Zahl ein Würfel, und der Bestand der Seite und der Zahl, die Seite dieses Würfels ist. (4 - 9)

Ich setze den Würfel 8W, und die zuzusetzende Zahl 1Z. Der Bestand des Würfels und der Zahl ist demnach 8W u 1Z, der Bestand der Seite und der Zahl, 3Z. Nun soll aber 8W u 1Z ein Würfel, und 3Z die Seite desselben sein; doch der Würfel von 3Z ist 27W. Folglich ist 27W gleich 8W u 1Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

27W = 8W u 1Z
8

19W = 1Z

so bleibt 19W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 19V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{19}}$. Allein $1^{\underline{19}}$ ist kein Viereck, folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 19 der Unterschied der beiden Würfel 8 und 27, und 1 ist der Unterschied ihrer Seiten. Hieraus geht hervor, daß wir statt 8 und 27, zwei Würfel nöthig haben, deren Unterschied irgend eine Viereckzahl, und der Unterschied ihrer Seiten die Einheit ist. Diese

Würfel finden wir so: Es sei die Seite des einen Würfels 1Z, des andern 1Z u 1; die Würfel selbst sind also 1W, und 1W 3V 3Z u 1. Der Unterschied beider Würfel ist demnach 3V 3Z u 1, und irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck der Seite 2Z w 1, nemlich 4V u 1 w 4Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{l} 4V \text{ u } 1 \text{ w } 4Z = 3V\,3Z \text{ u } 1 \\ 3 \quad\;\; 1 \qquad\qquad\quad 4 \\ \hline 1V \qquad\quad = \quad 7Z \end{array}$$

so bleibt 1V gleich 7Z, und durch 1Z getheilt, 1Z gleich 7. — Die Seiten der gesuchten Würfel sind demnach 7 und 8, und die Würfel selbst 343 und 512. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze den Würfel 343W, die zuzusetzende Zahl aber, wie zuvor, 1Z. Der Bestand des Würfels und der Zahl ist demnach 343W u 1Z, der Bestand der Seite und der Zahl 8Z. Nun soll aber 343W u 1Z ein Würfel, und 8Z die Seite desselben sein; doch der Würfel von 8Z ist 512W. Folglich ist 512W gleich 343W u 1Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcl} 512W & = & 343W \text{ u } 1Z \\ 343 & & \\ \hline 169W & = & 1Z \end{array}$$

so bleibt 169W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 169V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{169}}$, und 1Z gleich $1^{\underline{13}}$. — Der Würfel ist demnach $343^{\underline{2197}}$, die Seite desselben $7^{\underline{13}}$, und die zuzusetzende Zahl $1^{\underline{13}}$. Denn der Würfel mit $1^{\underline{13}}$ zusammengesetzt, giebt den Würfel $512^{\underline{2197}}$; die Seite mit $1^{\underline{13}}$ zusammengesetzt, giebt $8^{\underline{13}}$. Aber $8^{\underline{13}}$ ist die Seite des Würfels $512^{\underline{2197}}$.

Zwei Würfel zu finden, deren Unterschied gleich ist dem Unterschied ihrer Seiten. (4 - 12)

Ich setze die Seiten der gesuchten Würfel, aus denselben Gründen wie in voriger Aufgabe, 7Z und 8Z; die Würfel selbst sind demnach 343W und 512W. Nun soll aber der Unterschied der Würfel dem Unterschied der Seiten gleich sein; doch der Unterschied der Würfel ist 169W, und der Unterschied der Seiten 1Z. Folglich ist 169W gleich 1Z, und durch 1Z ge-

theilt, 169V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{169}}$, und 1Z gleich $1^{\underline{13}}$. — Die gesuchten Würfel sind demnach $343^{\underline{2197}}$ und $512^{\underline{2197}}$, und ihre Seiten $7^{\underline{13}}$ und $8^{\underline{13}}$; denn der Unterschied beider Würfel ist $1^{\underline{13}}$, und der Unterschied der Seiten ebenfalls.

Zwei Würfel zu finden, daß der Bestand des größten Würfels und der Seite des kleinern, gleich ist dem Bestande des kleinern Würfels und der Seite des größern. (4 - 13)

Ich setze wiederum die Seiten der gesuchten Würfel 7Z und 8Z. Die Würfel selbst sind demnach 343W und 512W. Nun soll aber der Bestand des größern Würfels und der Seite des kleinern, gleich sein dem Bestande des kleinern Würfels und der Seite des größern; folglich ist 512W u 7Z gleich 343W u 8Z. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{lcr} 512W \text{ u } 7Z & = & 343W \text{ u } 8Z \\ 343 & & 7 \\ \hline 169W & = & 1Z \end{array}$$

so bleibt 169W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 169V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{169}}$ und 1Z gleich $1^{\underline{13}}$. — Die gesuchten Würfel sind demnach $512^{\underline{2197}}$ und $343^{\underline{2197}}$, und ihre Seiten $8^{\underline{13}}$ und $7^{\underline{13}}$; denn der größere Würfel mit $7^{\underline{13}}$ zusammengesetzt, giebt $1695^{\underline{2197}}$, und der kleinere Würfel mit $8^{\underline{13}}$ zusammengesetzt, giebt dasselbe.

Zwei Zahlen zu finden, daß die zweite Zahl mit dem Würfel der ersten zusammengesetzt, ein Würfel, und die erste Zahl mit dem Viereck der zweiten zusammengesetzt, ein Viereck ist. (4 - 19)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 1Z; die zweite aber, da sie mit dem Würfel der ersten zusammengesetzt ein Würfel sein soll, 8 w 1W. Es soll aber auch die erste Zahl, mit dem Viereck der zweiten zusammengesetzt, ein Viereck sein; doch die erste Zahl ist 1Z und das Viereck der zweiten Zahl 1^{d}W u 64 w 16W. Folglich ist der Bestand von beiden 1^{d}W 1Z u 64 w 16W, und irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck der Seite |1W u 8, nemlich

$1^d W\ 16W$ u 64. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$
\begin{array}{lcl}
1^d W\ 16W \text{ u } 64 & = & 1^d W\ 1Z \text{ u } 64 \text{ w } 16W \\
\quad 16 & & \quad 1 \qquad 64 \\
\hline
\quad 32W & = & \quad 1Z
\end{array}
$$

so bleibt 32W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 32V gleich 1, also 1V gleich $\frac{1}{32}$. Allein $\frac{1}{32}$ ist kein Viereck, folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 32 aus der Zusammensetzung von zweimal 16, und 16 wieder aus der Zusammensetzung von zweimal 8 entstanden. Hieraus geht hervor, daß wir statt 8, eine Würfelzahl nöthig haben, deren Vierfaches ein Viereck ist. Diese Zahl finden wir so: Es sei die gesuchte Zahl 1W. Das Vierfache davon ist also 4W, und irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck 16V. Folglich ist 4W gleich 16V, und durch 1V getheilt, 4Z gleich 16, also 1Z gleich 4. — Die gesuchte Würfelzahl ist demnach 64. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze die erste Zahl, wie zuvor, 1Z, die zweite aber 64 w 1W. Es soll aber die erste Zahl, mit

dem Viereck der zweiten zusammengesetzt, ein Viereck sein; doch die erste Zahl ist 1Z und das Viereck der zweiten $1^{d}W$ u 4096 w 128W. Folglich ist der Bestand von beiden $1^{d}W$ 1Z u 4096 w 128W, und irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck der Seite 1W u 64, nemlich $1^{d}W$ 128W u 4096. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

$$1^{d}W\ 128W\ u\ 4096 = 1^{d}W\ 1Z\ u\ 4096\ w\ 128W$$
$$128 \qquad\qquad 1 \qquad 4096$$
$$\overline{256W \qquad = \qquad 1Z}$$

so bleibt 256W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 256V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{256}}$ und 1Z gleich $1^{\underline{16}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $1^{\underline{16}}$, die zweite $262143^{\underline{4096}}$. Denn der Würfel der ersten Zahl ist $1^{\underline{4096}}$, und dieser mit der zweiten Zahl zusammengesetzt, giebt den Würfel $362144^{\underline{4096}}$; das Viereck der zweiten Zahl ist $68718952449^{\underline{16777216}}$, und dieses mit der ersten Zahl zusammengesetzt, giebt das Viereck $68720001025^{\underline{16777216}}$.

Zwei Zahlen zu finden, daß jede, mit dem Erzeugniß beider zusammengesetzt, ein Würfel wird. (4 - 27)

Ich setze die erste gesuchte Zahl 8Z; die zweite aber, da das Erzeugniß beider durch den Zusatz der ersten Zahl ein Würfel werden soll, 1V w 1; denn 8Z mal 1V w 1 ist 8W w 8Z, und die erste Zahl zugesetzt, macht 8W. Es soll aber auch das Erzeugniß beider Zahlen durch den Zusatz der zweiten Zahl ein Würfel werden; doch 8W w 8Z mit 1V w 1 zusammengesetzt, macht 8W u 1V w 8Z w 1, und ist also irgend einem Würfel gleich. Es sei dies mit dem Würfel der Seite 2Z w 1, nemlich 8W u 6Z w 12V w 1. Setze ich nun das Abgezählte zusammen und trenne Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 8W & u & 6Z & w & 12V & w\ 1 & = & 8W & u\ 1V & w\ 8Z & w\ 1 \\ & & & & 1 & 1 & & & 8 & 6 & \\ \hline & & & & 13V & & = & & & 14Z & \end{array}$$

so bleibt 13V gleich 14Z, und durch 1Z getheilt, 13Z gleich 14, also 1Z gleich 14^{13}. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 112^{13}, die zweite

$27^{\underline{169}}$, und das Erzeugniß beider Zahlen $3024^{\underline{2197}}$. Aber die erste Zahl mit $3024^{\underline{2197}}$ zusammengesetzt, giebt den Würfel $21952^{\underline{2197}}$; die zweite Zahl mit $3024^{\underline{2197}}$ zusammengesetzt, den Würfel $3357^{\underline{2197}}$.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn der Bestand von beiden mit dem Erzeugniß beider zusammengesetzt, oder davon getrennt wird, ein Würfel entsteht. (4 - 30)

Zuförderst ist zu wissen nöthig, daß, wenn irgend ein Viereck in zwei solche Theile zerlegt wird, daß einer derselben die Seite des Vierecks ist, und man nun dem Erzeugniß beider Theile das Viereck selbst zusetzt, der Bestand ein Würfel ist. Ich setze daher den Bestand beider Zahlen 1V, die erste Zahl aber 1Z, und die andere 1V w 1Z. Das Erzeugniß beider Zahlen ist demnach 1W w 1V, und dieses Erzeugniß mit 1V zusammengesetzt, giebt den Würfel 1W. Nun soll aber auch der Uiberschuß, wenn 1V von dem Erzeugniß beider Zahlen getrennt wird, ein Würfel sein; doch 1V von 1W w 1V getrennt, läßt den Uiberschuß 1W w 2V.

Es ist also 1W w 2V ein Würfel. Dieser Würfel sei gleich $1^{\underline{8}}$ W. Folglich ist $1^{\underline{8}}$ W gleich 1W w 2V, und in ganzen Zahlen, 1W gleich 8W w 16V. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$
\begin{array}{l}
1W = 8W \text{ w } 16V \\
8 \\
\hline
7W \quad = \quad 16V
\end{array}
$$

so bleibt 7W gleich 16V, und durch 1V getheilt, 7Z gleich 16, also 1Z gleich $16^{\underline{7}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $16^{\underline{7}}$, die zweite $144^{\underline{49}}$. Denn der Bestand beider Zahlen, mit ihrem Erzeugniß zusammengesetzt, giebt den Würfel $4096^{\underline{343}}$, von ihrem Erzeugniß getrennt, den Würfel $512^{\underline{343}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß, mit dem Bestand von allen dreien vervielfältigt, die erste ein Dreieck, die zweite ein Viereck, die dritte einen Würfel giebt. (4 - 44)

Ich setze den Bestand aller drei Zahlen 1V, die erste Zahl aber $6^{\underline{1V}}$, die zweite $4^{\underline{1V}}$, die dritte $8^{\underline{1V}}$; denn mit 1V vervielfältigt, giebt die erste

Zahl das Dreieck 6, die zweite das Viereck 4, die dritte den Würfel 8. Nun sollen aber alle drei Zahlen zusammen 1V sein; doch alle drei zusammen sind 18^{IV}. Folglich ist 18^{IV} gleich 1V, und in ganzen Zahlen, 1^{d}V gleich 18. Allein 18 ist kein Doppelviereck, folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 18 der Bestand von 6, 4 und 8. Hieraus geht hervor, daß wir statt 6, 4 und 8, Zahlen nöthig haben, deren Bestand ein Doppelviereck ist. Diese Zahlen finden wir so: Es sei der Bestand aller drei Zahlen 1^{d}V, das gesuchte Viereck aber (nach der Seite 1V w 1) 1^{d}V u 1 w 2V. Trenne ich dieses Viereck von 1^{d}V, so bleibt 2V w 1 als der Bestand des gesuchten Würfels und Dreiecks. Es sei wiederum, wie zuvor, 8 der Würfel; trenne ich 8 von 2V w 1, so bleibt 2V w 9 als Dreieck. Nun giebt aber jede Dreieckzahl, mit 8 vervielfältigt, und zu dem Erzeugniß 1 gesetzt, ein Viereck; doch 2V w 9 mit 8 vervielfältigt, giebt 16V w 72. Folglich ist 16V w 71 ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 4Z w 1, nemlich 16V u 1 w 8Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

16V u 1 w 8Z = 16V w 71
16 1

8Z = 72

so bleibt 8Z gleich 72, und es ist also 1Z gleich 9. — Das gesuchte Dreieck ist demnach 153, das Viereck 6400, und der Würfel 8. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze den Bestand aller drei Zahlen, wie zuvor, 1V, die erste Zahl aber $153^{\underline{1V}}$, die zweite $6400^{\underline{1V}}$, die dritte $8^{\underline{1V}}$. Nun sollen aber alle drei Zahlen zusammen 1V sein; doch alle drei zusammen sind $6561^{\underline{1V}}$. Folglich ist $6561^{\underline{1V}}$ gleich 1V, und in ganzen Zahlen, $1^{d}V$ gleich 6561, also 1Z gleich 9. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $153^{\underline{81}}$, die zweite $6400^{\underline{81}}$, die dritte $8^{\underline{81}}$, und der Bestand aller drei Zahlen 81. Denn die erste Zahl mit 81 vervielfältigt, giebt das Dreieck 153; die zweite mit 81 vervielfältigt, das Viereck 6400; die dritte mit 81 vervielfältigt, den Würfel 8.

Drei Zahlen zu finden, daß jede, mit dem Würfel des Bestandes von allen dreien zusammengesetzt, einen Würfel giebt. (5 - 18)

Ich setze den Bestand aller drei Zahlen 1Z; der Würfel davon ist also 1W. Da aber jede der drei Zahlen durch den Zusatz von 1W zum Würfel werden soll, so setze ich die erste Zahl 7W, die zweite 26W, die dritte 63W. Nun sol-len aber alle drei Zahlen zusammen 1Z sein; doch alle drei zusammen sind 96W. Folglich ist 96W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 96V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{96}}$. Allein $1^{\underline{96}}$ ist kein Viereck, folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 96 der Bestand dreier Zahlen, von de-nen jede durch den Zusatz der Einheit zum Wür-fel wird. Hieraus geht hervor, daß wir statt der Zahlen 7, 26, 63, andre drei Zahlen nöthig ha-ben, welche nicht nur durch den Zusatz der Ein-heit Würfel werden, sondern deren Bestand auch ein Viereck ist. Diese Zahlen finden wir so: Ich nehme drei Würfel nach den Seiten 1Z u 1, 2 w 1Z, und 2, nemlich 1W 3V 3Z u 1, 6V u 8 w 1W w 12Z, und 8. Trenne ich nun von jedem dieser Würfel die Einheit, so erhalte ich als erste Zahl 1W 3V u 3Z, als zweite Zahl 6V u 7 w 1W w 12Z, und als dritte Zahl 7. Es soll aber der Bestand aller drei Zahlen ein Viereck

sein; doch der Bestand aller drei ist 9V u 14 w 9Z. Folglich ist 9V u 14 w 9Z ein Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 3Z w 4, nemlich 9V u 16 w 24Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

9V u 14 w 9Z	=	9V u 16 w 24Z	
9	24		14
	15Z	=	2

so bleibt 15Z gleich 2, und es ist also 1Z gleich $\frac{2}{15}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $\frac{1538}{3375}$, die zweite $\frac{18577}{3375}$, die dritte 7. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze die erste Zahl $\frac{1538}{3375}$W, die zweite $\frac{18577}{3375}$W, die dritte 7W. Es sollen aber alle drei Zahlen zusammeu 1Z sein; doch alle drei zusammen sind $\frac{43740}{3375}$W, oder durch 15 getheilt, $\frac{2916}{225}$W. Folglich ist $\frac{2916}{225}$W gleich 1Z, und in ganzen Zahlen, 2916W gleich 225Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 2916V gleich 225, und es ist also 1V gleich $\frac{225}{2916}$, und 1Z gleich $\frac{15}{54}$ oder $\frac{5}{18}$. — Die erste gesuchte Zahl ist

ist demnach $1538^{\underline{157464}}$, die zweite $18577^{\underline{157464}}$, die dritte $23625^{\underline{157464}}$, und der Würfel des Bestandes von allen dreien $125^{\underline{5832}}$. Denn diese Zahlen mit $125^{\underline{5832}}$ zusammengesetzt, geben die Würfel $4913^{\underline{157464}}$, $21952^{\underline{157464}}$, $27000^{\underline{157464}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn der Würfel des Bestandes aller drei von jeder Zahl getrennt wird, die Uiberschüsse Würfel sind. (5 – 20)

Ich setze den Bestand aller drei Zahlen 1Z; der Würfel davon ist also 1W. Da aber jede Zahl, wenn 1W davon getrennt wird, zum Würfel werden soll, so setze ich die erste Zahl 2W, die zweite 9W, die dritte 28W. Nun sollen aber alle drei Zahlen zusammen 1Z sein; doch alle drei zusammen sind 39W. Folglich ist 39W gleich 1Z, und durch 1Z getheilt, 39V gleich 1, also 1V gleich $1^{\underline{39}}$. Allein $1^{\underline{39}}$ ist kein Viereck, folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 39 der Bestand dreier Zahlen, von denen jede durch die Trennung der Einheit zum Würfel wird. Hieraus geht hervor, daß wir statt der Zahlen 2, 9, 28, andere drei Zah-

len nöthig haben, welche nicht nur durch die Trennung der Einheit Würfel werden, sondern deren Bestand auch ein Viereck ist. Diese Zahlen finden wir so: Ich nehme drei Würfel nach den Seiten 1Z, 3 w 1Z, und 1, nemlich 1W, 9V u 27 w 27Z w 1W, und 1. Vergrößere ich den Bestand aller drei Zahlen durch 3, so erhalte ich 9V u 31 w 27Z als Viereck. Dies Viereck sei gleich dem der Seite 3Z w 7, nemlich 9V u 49 w 42Z. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

9V u 49 w 42Z	=	9V u 31 w 27Z
9	27	49
15Z	=	18

so bleibt 15Z gleich 18, und es ist also 1Z gleich $18^{\underline{15}}$ oder $6^{\underline{5}}$. — Der erste Würfel ist demnach $216^{\underline{125}}$, der zweite $729^{\underline{125}}$, der dritte 1. Durch den Zusatz der Einheit erhalten wir nun die drei gesuchten Zahlen $341^{\underline{125}}$, $854^{\underline{125}}$, und 2. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze die erste Zahl $341^{\underline{125}}$W, die zweite $854^{\underline{125}}$W, die dritte 2W. Es sollen aber alle drei Zahlen zusammen

1Z sein; doch alle drei zusammen sind $1445^{\underline{125}}$W, oder durch 5 getheilt, $289^{\underline{25}}$W. Folglich ist $289^{\underline{25}}$W gleich 1Z, und in ganzen Zahlen, 289W gleich 25Z. Theile ich nun alles durch 1Z, so bleibt 289V gleich 25, und es ist also 1V gleich $25^{\underline{289}}$, und 1Z gleich $5^{\underline{17}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $341^{\underline{4913}}$, die zweite $854^{\underline{4913}}$, die dritte $250^{\underline{4913}}$, und der Würfel des Bestandes von allen dreien $125^{\underline{4913}}$. Denn wird $125^{\underline{4913}}$ von jeder dieser Zahlen getrennt, so bleiben als Uiberschüsse die Würfel $216^{\underline{4913}}$, $729^{\underline{4913}}$, $125^{\underline{4913}}$.

Drei Zahlen zu finden, daß jede, mit dem Würfel des Bestandes von allen dreien zusammengesetzt, ein Viereck bildet, und der Bestand aller drei Zahlen ebenfalls ein Viereck ist. (5 - 21)

Ich setze den Bestand aller drei Zahlen, da er ein Viereck sein soll, 1V; der Würfel davon ist also 1^{d}W. Da aber jede der drei Zahlen durch den Zusatz von 1^{4}W zum Viereck werden soll, so setze ich die erste Zahl 3^{d}W, die zweite 8^{d}W, die dritte 15^{d}W. Nun sollen aber alle drei Zahlen zusammen 1V sein; doch alle drei

zusammen sind $26^d W$. Folglich ist $26^d W$ gleich 1V, und durch 1V getheilt, $26^d V$ gleich 1, also $1^d V$ gleich $1^{\underline{26}}$. Allein $1^{\underline{26}}$ ist kein Doppelviereck, folglich der Werth von 1Z nicht zu finden. Es ist aber 26 der Bestand dreier Zahlen, von denen jede durch den Zusatz der Einheit zum Viereck wird. Hieraus geht hervor, daß wir statt der Zahlen 3, 8, 15, andere drei Zahlen nöthig haben, welche nicht nur durch den Zusatz der Einheit Vierecke werden, sondern deren Bestand auch ein Doppelviereck ist. Diese Zahlen finden wir so: Ich nehme drei Vierecke nach den Seiten 1V w 1, 1Z u 1, und 1Z w 1, nemlich $1^d V$ u 1 w 2V, 1V 2Z u 1, und 1V u 1 w 2Z. Trenne ich nun von jedem dieser Vierecke die Einheit, so erhalte ich als erste Zahl $1^d V$ w 2V, als zweite Zahl 1V u 2Z, und als dritte Zahl 1V w 2Z. Es soll aber der Bestand aller drei Zahlen $1^d V$ sein; doch der Bestand von $1^d V$ w 2V, 1V u 2Z, und 1V w 2Z ist in der That $1^d V$. Folglich findet keine Gleichung Statt, und 1Z kann also jeder beliebigen Zahl gleich gesetzt werden. Es sei daher 1Z gleich 3. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach 63, die zweite 15,

die dritte 3. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze die erste Zahl 63^{d}W, die zweite 15^{d}W, die dritte 3^{d}W. Es sollen aber alle drei Zahlen zusammen 1V sein; doch alle drei zusammen sind 81^{d}W. Folglich ist 81^{d}W gleich 1V, und durch 1V getheilt, 81^{d}V gleich 1, also 1^{d}V gleich $1^{\underline{81}}$, und 1Z gleich $1^{\underline{3}}$. — Die erste gesuchte Zahl ist demnach $63^{\underline{729}}$, die zweite $15^{\underline{729}}$, die dritte $3^{\underline{729}}$. Denn der Bestand aller drei Zahlen ist das Viereck $1^{\underline{9}}$, und der Würfel davon $1^{\underline{729}}$; die drei Zahlen aber mit $1^{\underline{729}}$ zusammengesetzt, geben die Vierecke $64^{\underline{729}}$, $16^{\underline{729}}$, $4^{\underline{729}}$.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß, wenn die untere oder obere Seite von der Hypotenuse getrennt wird, die Uiberschüsse Würfel sind. (6 - 1)

Ich setze die beiden Zahlen, aus welchen das Dreieck gebildet werden soll, 1Z, und 3. Die Hypotenuse ist demnach 1V u 9, die obere Seite 6Z, und die untere Seite 1V w 9. Nun soll aber von der Hypotenuse jede der andern beiden Seiten getrennt werden, und die Uiberschüsse Würfel sein;

doch 1V w 9 von 1V u 9 getrennt, läßt den Uiberschuß 18, und 18 ist kein Würfel. Es ist aber 18 entstanden, indem das Viereck von 3 zweimal genommen wurde. Hieraus geht hervor, daß wir statt 3 eine Zahl nöthig haben, deren Viereck, zweimal genommen, einen Würfel giebt. Diese Zahl finden wir so: Es sei die gesuchte Zahl 1Z; das Viereck davon, zweimal genommen, ist also 2V, und irgend einem Würfel gleich. Es sei dies mit dem Würfel 1W. Folglich ist 1W gleich 2V, und durch 1V getheilt, 1Z gleich 2. — Die gesuchte Zahl ist demnach 2, und ich bilde nun ein Dreieck aus 1Z, und 2. Also ist die Hypotenuse 1V u 4, die obere Seite 4Z, und die untere Seite 1V w 4; denn wird jetzt die untere Seite von der Hypotenuse getrennt, so bleibt der Würfel 8 als Uiberschuß. Es soll aber auch die obere Seite von der Hypotenuse getrennt werden, und der Uiberschuß ein Würfel sein; doch 4Z von 1V u 4 getrennt, läßt den Uiberschuß 1V u 4 w 4Z als Würfel. Aber 1V u 4 w 4Z ist auch zugleich ein Viereck, nemlich nach der Seite 1Z w 2. Folglich ist auch 1Z w 2 ein

Würfel; denn nur das Viereck einer Würfelzahl ist auch zugleich ein Würfel. Es sei daher 1Z w 2 gleich 8. Setze ich nun das Abgezählte zusammen,

1Z w 2	=	8
		2
1Z	=	10

so bleibt 1Z gleich 10. — Das gesuchte Dreieck muß demnach aus den Zahlen 10 und 2 gebildet werden, und es ist also die Hypotenuse 104, die obere Seite 40, und die untere Seite 96. Denn die obere Seite von 104 getrennt, läßt den Würfel 64; die untere Seite von 104 getrennt, den Würfel 8.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß der Inhalt, mit der obern Seite zusammengesetzt, ein Viereck, der Umfang aber ein Würfel ist. (6 - 21)

Ich setze die beiden Zahlen, aus welchen das Dreieck gebildet werden soll, 1Z, und 1Z u 1. Die obere Seite ist demnach 2Z u 1, die untere Seite 2V u 2Z, und die Hypotenuse 2V 2Z u 1. Nun soll aber der Umfang (d. h. der Bestand

aller drei Seiten) ein Würfel sein; doch der Umfang ist 4V 6Z u 2. Es kann aber 4V 6Z u 2 durch 1Z u 1 getheilt werden. Demnach ist die obere Seite 2Z u $1^{\underline{1Z\ u\ 1}}$, die untere Seite 2V u $2Z^{\underline{1Z\ u\ 1}}$, die Hypotenuse 2V 2Z u $1^{\underline{1Z\ u\ 1}}$, der Umfang also 4V 6Z u $2^{\underline{1Z\ u\ 1}}$ oder 4Z u 2, und ein Würfel. Nun soll aber auch der Inhalt, mit der obern Seite zusammengesetzt, ein Viereck sein. Doch der Inhalt ist 2W 3V u $1Z^{\underline{1V\ 2Z\ u\ 1}}$, und die obere Seite 2Z u $1^{\underline{1Z\ u\ 1}}$; der Bestand von beiden folglich 2W 5V 4Z u $1^{\underline{1V\ 2Z\ u\ 1}}$ oder 2Z u 1, und ein Viereck. Der gefundene Würfel 4Z u 2 enthält also zweimal das Viereck 2Z u 1; demnach ist 4Z u 2 jedem Würfel gleich, der aus zwei gleichen Vierecken besteht. Es sei daher 4Z u 2 gleich 512. Trenne ich nun Gleiches von Gleichem,

$$\begin{array}{rcl} 4Z\ u\ 2 & = & 512 \\ & & 2 \\ \hline 4Z & = & 510 \end{array}$$

so bleibt 4Z gleich 510 und es ist also 1Z gleich $510^{\underline{4}}$ oder $255^{\underline{2}}$. — Die obere Seite ist demnach $512^{\underline{257}}$, die untere Seite $65535^{\underline{752}}$, die Hy-

potenuse 65537^{257}, und der Inhalt 65280^{257}. Denn die obere Seite mit 65280^{257} zusammengesetzt, giebt das Viereck 256 der Umfang aber bildet den Würfel 512.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß die Hypotenuse, mit dem Inhalt zusammengesetzt, ein Würfel, der Umfang aber ein Viereck ist. (6 - 20)

Ich setze den Inhalt 1Z; die Hypotenuse aber, da sie mit dem Inhalt zusammengesetzt, einen Würfel geben soll, 8 w 1Z. Ferner, da der Inhalt 1Z ist, so muß das Erzeugniß, wenn die beiden Seiten des rechten Winkels mit einander vervielfältigt werden, 2Z sein. Aber 2Z entsteht durch die Vervielfältigung von 1Z mit 2; setze ich daher die obere Seite 1Z, so ist nothwendig die untere 2. Nun soll aber der Umfang ein Viereck sein; doch 2, 1Z, und 8 w 1Z, geben zusammengesetzt 10, und 10 ist kein Viereck. Es ist aber 10 aus der Zusammensetzung von 8 und 2 entstanden. Hieraus geht hervor, daß wir statt 8 einen Würfel nöthig haben, welcher durch den Zusatz

von 2 zum Viereck wird. Diesen Würfel finden wir so: Es sei 2Z w 1 die Seite des Würfels; der Würfel selbst ist also 8W u 6Z w 12V w 1. Nun soll aber dieser Würfel durch den Zusatz von 2 zum Viereck werden; doch 8W u 6Z w 12V w 1, mit 2 zusammengesetzt, macht 8W6Z u 1 w 12V. Folglich ist 8W6Z u 1 w 12V irgend einem Viereck gleich. Es sei dies mit dem Viereck der Seite 3Z u 1, nemlich 9V6Z u 1. Setze ich nun das Abgezählte zusammen, und trenne Gleiches von Gleichem,

8W6Z u 1 w 12V = 9V 6Z u 1
6 12 1

8W = 21V

so bleibt 8W gleich 21V, und durch 1V getheilt, 8Z gleich 21, also 1Z gleich $21^{\underline{8}}$. — Der gesuchte Würfel ist demnach $4913^{\underline{64}}$. Jetzt kehre ich zur Aufgabe zurück, und setze die Hypotenuse $4913^{\underline{64}}$ w 1Z; die obere Seite aber, wie zuvor, 1Z, und die untere 2. Nun muß aber das Viereck der Hypotenuse den Vierecken der andern beiden Seiten zusammen gleich sein; doch das Viereck der Hypotenuse ist 1V u $24137569^{\underline{4096}}$

w $9826^{\underline{64}}$Z, und der Bestand der Vierecke der obern und untern Seite 1V u 4. Folglich ist 1V u 4 gleich 1V u $24137569^{\underline{4096}}$ w $9826^{\underline{64}}$Z, und in ganzen Zahlen, 4096V u 24137569 w 628864Z gleich 4096V u 16384. Setze ich nun das Abgezählte zusammen und trenne Gleiches von Gleichem,

4096V u ~~24137569~~ w 628864Z = ~~4096~~V u 16384
4096 24137569

628864Z = 24121185

so bleibt 628864Z gleich 24121185, und es ist also 1Z gleich $24121185^{\underline{628864}}$. — Die obere Seite ist demnach $24121185^{\underline{628864}}$, die untere Seite $1257728^{\underline{628864}}$, die Hypotenuse $24153953^{\underline{628864}}$, und der Inhalt, wie die obere Seite, $24121185^{\underline{628864}}$. Denn die Hypotenuse und der Inhalt geben, zusammengesetzt, den Würfel $4913^{\underline{64}}$, der Umfang aber bildet das Viereck $5041^{\underline{64}}$.

10.

Aufgaben ohne Lösung.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn von dem Viereck einer jeden der Bestand beider getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn ihr Erzeugniß mit jeder einzelnen Zahl, oder auch mit allen beiden, zusammengesetzt wird, die Beständе Vierecke sind.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn jede einzelne Zahl von dem Erzeugniß beider getrennt wird, die Uiberschüsse Würfel sind.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn die größere dem Viereck der kleinern, und die kleinere dem Viereck der größern zugesetzt wird, die Bestände Vierecke sind.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn entweder zu jeder einzelnen Zahl, oder zu dem Bestand beider oder auch zu ihrem Unterschied, die Einheit gesetzt wird, Vierecke entstehen.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn jede einzelne Zahl mit dem Erzeugniß beider zusammengesetzt wird, Vierecke entstehen, deren Seiten zusammen einer gegebenen Zahl gleich sind. — Es sei 6 die gegebene Zahl.

Zwei Zahlen zu finden, daß, wenn ihr Erzeugniß mit dem Bestand beider zusammengesetzt oder davon getrennt wird, Vierecke entstehen, und der Bestand beider Zahlen ebenfalls ein Viereck ist.

Zwei unbestimmte Zahlen zu finden, daß das Erzeugniß beider, mit ihrem Bestand zusammengesetzt, eine gegebene Zahl ist. — Es sei 8 die gegebene Zahl.

Zwei unbestimmte Zahlen zu finden, daß ihr Erzeugniß zu ihrem Bestand ein gegebenes Verhältniß hat. — Es sei das gegebene Verhältniß dreifach.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn das Viereck einer jeden mit der nächstfolgenden Zahl zusammengesetzt wird, die Bestände Vierecke sind.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn von dem Viereck einer jeden der Bestand aller drei Zahlen getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn jede derselben von dem Viereck des Bestandes aller drei Zahlen getrennt wird, die Uiberschüsse Würfel sind.

Drei Viereckzahlen zu finden, daß, wenn jede derselben mit dem Erzeugniß aller drei Zahlen zusammengesetzt wird, die Bestände Vierecke sind.

Drei Viereckzahlen zu finden, daß, wenn zu dem Bestand von je zweien eine gegebene Zahl gesetzt wird, Vierecke entstehen. — Es sei 15 die gegebene Zahl.

Drei Viereckzahlen zu finden, daß der Bestand ihrer Vierecke wieder ein Viereck ist.

Drei Viereckzahlen zu finden, daß, wenn die Erzeugnisse von je zweien mit ihren Beständen, oder auch mit der übrig gebliebenen Zahl, zusammengesetzt werden, Vierecke entstehen.

Drei Zahlen zu finden, daß der Bestand von je zweien um ein Viereck größer ist als die

übrig gebliebene Zahl, und der Bestand aller drei Zahlen ebenfalls ein Viereck ist.

Drei Zahlen zu finden, daß, wenn von dem Viereck einer jeden die nächstfolgende Zahl getrennt wird, die Uiberschüsse Vierecke sind, und der Bestand aller drei Zahlen ebenfalls ein Viereck ist.

Drei Zahlen zu finden, daß die Erzeugnisse von je zweien zu ihren Beständen gegebene Verhältnisse haben. — Es sei das Erzeugniß der ersten und zweiten Zahl zu ihrem Bestand dreifach, das Erzeugniß der zweiten und dritten zu ihrem Bestand vierfach, und das Erzeugniß der ersten und dritten zu ihrem Bestand fünffach.

Drei Zahlen zu finden, die zusammen einer gegebenen Zahl gleich sind, und das Erzeugniß von allen dreien ein Würfel, der Bestand ihrer drei Unterschiede aber die Seite dieses Würfels ist. — Es sei 4 die gegebene Zahl.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß, wenn die untere oder obere Seite mit der Hypotenuse zusammngesetzt wird, die Bestände Würfel sind.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß die größere Seite des rechten Winkels, der Unterschied dieser beiden Seiten, und der Bestand der kleinern Seite und des Inhalts, Vierecke sind.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß, wenn die obere oder untere Seite mit dem Inhalt zusammengesetzt wird, die Bestände Vierecke sind.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß, wenn die Hypotenuse, oder eine der andern Seiten, mit dem Inhalt zusammengesetzt wird, die Bestände Vierecke sind.

Ein rechtwinklichtes Dreieck zu finden, daß der Umfang ein Viereck, und der Bestand des Inhalts und Umfangs ein Würfel ist.

Gedruckt bei Johann Friedrich Starcke.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Drieberg, Friedrich <<von>>,

Die Arithmetik der Griechen

Bd.: 2. 1821. - 144 S.

Leipzig 1821

Math.p. 109 l-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081690-7